ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 5, 1967 Механика

Л. А. МОВСИСЯН

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Пусть тонкая упругая цилиндрическая оболочка толщиной h и радиусом R находится в нестационарном температурном поле. Предположим, что длина оболочки со временем изменяется по заданному закону и граничные условия как для температурной задачи, так и для задачи колебания оболочки задаются на концах изменяющихся сторон.

Если принять линейную зависимость распределения тепла по толщине оболочки, как обычно делается в теории оболочек,

$$T = T_0(x, y, t) + z\vartheta(x, y, t) \tag{1.1}$$

то T_0 и ϑ, как известно [1], должны удовлетворять следующим уравнениям теплопроводности:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{\varkappa}{R^2}\Delta^2 T_0 + \frac{2kT_0}{\rho h c_p} = \frac{Q}{\rho h c_p} + \frac{k}{\rho h c_p}(T_+ + T_-) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{\varkappa}{R^2}\Delta^2\vartheta + \left(\frac{12\varkappa}{h^2} + \frac{6k}{\rho h c_p}\right)\vartheta = \frac{12Qz_0}{\rho h^3 c_p} + \frac{6k(T_+ - T_-)}{\rho h^2 c_p} \tag{1.3}$$

Здесь c_p — удельная теплоемкость, ρ — плотность материала, λ — коэффициент теплопроводности, q — плотность тепловых источников, k — коэффициент теплопередачи поверхности тела, T_+, T_- — температуры наружной и внутренней среды, $\varkappa = \dfrac{\lambda}{\rho c_p}$ — коэффициент температуропроводности, x, y — безразмерные координаты: соответственно безразмерная длина образующей, т. е. отношение истинной длины образующей к радиусу оболочки и центральный угол, отсчитываемый от некоторой начальной образующей, t — время,

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} q\,dz, \quad z_0 = \frac{1}{Q}\int_{-h/2}^{h/2} qz\,dz, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.4}$$

q — плотность тепловых источников.

Условия теплообмена

$$\frac{\partial T_0}{\partial x} + k(T_0 - T_\Gamma) = 0, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + k(\vartheta - \vartheta_\Gamma) = 0 \tag{1.5}$$

должны быть поставлены на торцах оболочки $x = 0$ и $x = l(t)$.

В (1.5) T_Γ и ϑ_Γ — средняя температура и температурный градиент на торцах оболочки.

Соотношения упругости теории цилиндрических оболочек с учетом (1.1) будут

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}[\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - \alpha(1+\nu)T_0], \quad M_1 = -D(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2 - \alpha(1+\nu)\theta]$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}[\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 - \alpha(1+\nu)T_0], \quad M_2 = -D[\varkappa_2 + \nu\varkappa_1 - \alpha(1+\nu)\theta] \quad (1.6)$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\omega, \qquad H = D(1-\nu)\tau, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

им соответствуют следующие уравнения движения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \nu\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha(1+\nu)R\frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{E}R^2\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha(1+\nu)R\frac{\partial T_0}{\partial y} + \frac{1-\nu^2}{E}R^2\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

$$\nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - c^2\Delta^2\Delta^2 w - w = -\frac{1-\nu^2}{Eh}R^2\left[Z - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] +$$

$$+ \alpha(1+\nu)RT_0 - \frac{\alpha h^2(1+\nu)}{12}\Delta^2\theta, \qquad c^2 = h^2/12R^2$$

Пренебрегая в первых двух уравнениях инерционными членами, представим систему (1.7) в виде одного уравнения относительно перемещения w, как сделано это Доннеллем в случае задачи устойчивости. Из первых двух уравнений легко получить

$$\Delta^2\Delta^2 u = -\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \nu\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \alpha(1+\nu)R\frac{\partial}{\partial x}\Delta^2 T_0$$

$$\Delta^2\Delta^2 v = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \alpha(1+\nu)R\frac{\partial}{\partial y}\Delta^2 T_0 \quad (1.8)$$

Подвергая третье уравнение (1.7) операции $\Delta^2\Delta^2$ и учитывая (1.8), окончательно получим

$$\Delta^2\Delta^2\Delta^2\Delta^2 w + \frac{1-\nu^2}{c^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{R^4}{D}\Delta^2\Delta^2\left(Z - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) +$$

$$+ \alpha R^2(1+\nu)\Delta^2\Delta^2\Delta^2\theta - \frac{\alpha R^2(1-\nu^2)}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta^2 T_0 \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) описывает колебания оболочки изгибного типа, т. е. колебания с частотами, имеющими порядок собственных частот нормальных колебаний, но малых по сравнению с собственными частотами тангенциальных колебаний.

При решении уравнений (1.8), (1.9), так же, как и при решении уравнений теплопередачи (1.2) и (1.3), граничные условия должны быть поставлены на торцах переменной длины $x = 0$ и $x = l(t)$.

2. Уравнения (1.2), (1.3) и (1.9) решаются методом Галеркина. Ищем их решения в виде

$$
\begin{gathered}
T_0 = \sum_{m,n} \psi_{mn}(t)\, X_m^{(1)}[x, l(t)]\; Y_n^{(1)}(y) \\
\theta = \sum_{m,n} \varphi_{mn}(t)\, X_m^{(2)}[x, l(t)]\, Y_n^{(2)}(y) \\
w = \sum_{m,n} f_{mn}(t)\, X_m^{(3)}[x, l(t)]\, Y_n^{(3)}(y)
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

Заметим, что функции $X_m^{(i)}$, в отличие от обычных случаев (когда длина оболочки постоянная), должны зависеть от t. Кстати, в качестве этих функций можно брать обычные (например, балочные), только в их выражениях длина оболочки должна быть заменена через $l(t)$.

Применяя метод Галеркина (интегрирование по x производится в интервале $0 \leqslant x \leqslant l(t)$) и оставляя только канонические члены для неизвестных ψ_{mn}, φ_{mn} и f_{mn}, будем иметь

$$
I_1(t) \frac{d\psi_{mn}}{dt} + I_2(t)\, \psi_{mn} = F_{mn}^{(1)} \tag{2.2}
$$

$$
I_3(t) \frac{d\varphi_{mn}}{dt} + I_4(t)\, \varphi_{mn} = F_{mn}^{(2)} \tag{2.3}
$$

$$
I_5(t) \frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + I_6(t) \frac{df_{mn}}{dt} + I_7(t)\, f_{mn} = F_{mn}^{(3)} \tag{2.4}
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$
I_1(t) = \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} (X_m^{(1)})^2\, (Y_n^{(1)})^2\, dxdy
$$

$$
I_2(t) = \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} \left\{ \frac{dl}{dt} \frac{dX_m^{(1)}}{dl} Y_n^{(1)} - \frac{\varkappa}{R^2} \Delta^2 [X_m^{(1)} Y_n^{(1)}] + \right.
$$

$$
\left. + \frac{2k}{\rho h c_p} X_m^{(1)} Y_n^{(1)} \right\} X_m^{(1)} Y_n^{(1)}\, dxdy
$$

$$
I_3(t) = \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} (X_m^{(2)})^2\, (Y_n^{(2)})^2\, dxdy
$$

$$
I_4(t) = \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} \left\{ \frac{dl}{dt} \frac{dX_m^{(2)}}{dl} Y_n^{(2)} - \frac{\varkappa}{R^2} \Delta^2 [X_m^{(2)} Y_n^{(2)}] + \right.
$$

$$+\left(\frac{2\varkappa}{h^2}+\frac{6k}{\rho hc_p}\right)X_m^{(2)}Y_n^{(2)}\Big\}X_m^{(2)}Y_n^{(2)}dxdy$$

$$I_5(t)=\frac{\rho hR^4}{D}\int\limits_0^{l(t)}\int\limits_0^{y_0}\Delta^2\Delta^2\left[X_m^{(3)}Y_n^{(3)}\right]X_m^{(3)}Y_n^{(3)}dxdy \qquad (2.5)$$

$$I_6(t)=\frac{2\rho hR^4}{D}\frac{dl}{dt}\int\limits_0^{l(t)}\int\limits_0^{y_0}\Delta^2\Delta^2\left[\frac{dX_m^{(3)}}{dl}Y_n^{(3)}\right]X_m^{(3)}Y_n^{(3)}dxdy$$

$$I_7(t)=\int\limits_0^{l(t)}\int\limits_0^{y_0}\Big\{\frac{\rho hR^4}{D}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2\Delta^2\Delta^2\left[\frac{d^2X_m^{(3)}}{dl^2}Y_n^{(3)}\right]+\Delta^2\Delta^2\Delta^2\Delta^2\left[X_m^{(3)}Y_n^{(3)}\right]+$$

$$+\frac{\rho hR^4}{D}\frac{d^2l}{dt^2}\Delta^2\Delta^2\left[\frac{dX_m^{(3)}}{dl}Y_n^{(3)}\right]+\frac{1-\nu^2}{c^2}\frac{d^4X_m^{(3)}}{dx^4}Y_n^{(3)}\Big\}X_m^{(3)}Y_n^{(3)}dxdy$$

$$F_{mn}^{(1)}=\int\limits_0^{l(t)}\int\limits_0^{y_0}\left[\frac{Q}{\rho hc_p}+\frac{k}{\rho hc_p}(T_++T_-)\right]X_m^{(1)}Y_n^{(1)}dxdy$$

$$F_{mn}^{(2)}=\int\limits_0^{l(t)}\int\limits_0^{y_0}\left[\frac{12Qz}{\rho h^3c_p}+\frac{6k}{\rho h^2c_p}(T_+-T_-)\right]X_m^{(2)}Y_n^{(2)}dxdy$$

$$F_{mn}^{(3)}=\int\limits_0^{l(t)}\int\limits_0^{y_0}\Big[\frac{R^4}{D}\Delta^2\Delta^2Z+\alpha(1+\nu)R^2\Delta^2\Delta^2\Delta^2\theta-$$

$$-\frac{\alpha R^2(1-\nu^2)}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta^2T_0\Big]X_m^{(3)}Y_n^{(3)}dxdy$$

Задачу можно считать хотя бы принципиально решённой. Уравнения (2.2) и (2.3) интегрируются просто, а (2.4) можно интегрировать только приближенно. В частности, если в течение одного периода колебаний длина оболочки меняется не сильно, то можно применить метод асимптотического интегрирования [2].

3. Рассмотрим одну простую одномерную задачу, для которой удается получить точное решение. Помимо того, что эта задача имеет самостоятельный интерес, она может служить некоторым эталоном для упрощения задач в общей постановке. Дело в том, что передача тепла из одного участка тела в другой происходит очень медленно и, если нестационарность температурной задачи связана только с изменением длины оболочки, то при быстром изменении ее температура не успеет передаться на другие сечения. Поэтому можно рассматривать такую задачу как стационарную. Для упругой задачи, — наоборот, если скорость изменения длины мала и отсутствуют начальные

отклонения, скорость отклонения и поверхностные силы, то эту часть задачи можно рассматривать как квазистатическую, и время изменения длины войдет в расчетные величины как параметр.

Пусть имеется полубесконечная цилиндрическая оболочка, которую будем рассматривать как стержень. Температуру по толщине стержня примем постоянной $T = T(x, t)$, стержень — свободным от тепловых источников $(Q = 0)$ и примем также, что отсутствует передача тепла через поверхность стержня $(k = 0)$.

Уравнение теплопроводности в этом случае из (1.2) будет

$$b^2 \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь x — расстояние точки, $b^2 = 1/\varkappa$.

Пусть стержень, начиная с момента $t = 0$, укорачивается с постоянной скоростью $2C$ и задана температурная функция $T = T_2(t)$ в этих же меняющихся сечениях. Начальное и краевое условия для (3.1) должны быть поставлены в виде

$$\begin{aligned} T &= T_1(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \\ T &= T_2(t) \quad \text{при} \quad x = 2Ct \end{aligned} \tag{3.2}$$

Уравнение продольного движения стержня-оболочки из (1.7) будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha a^2 \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3.3}$$

с начальными и краевым условиями, соответственно,

$$u = f(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{3.4}$$

$$u = \psi(t) \quad \text{при} \quad x = 2Ct \tag{3.5}$$

Относительно функций $T_1(x)$, $f(x)$ и $\varphi(x)$ предполагается, что они обеспечивают ограниченность на бесконечности функций $T(x, t)$ и $u(x, t)$.

Преобразуем (3.1) — (3.5), введя вместо x новую координату

$$y = x - 2Ct$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 2b^2 C \frac{\partial T}{\partial y} - b^2 \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{3.1'}$$

$$\begin{aligned} T &= T_1(y) \quad \text{при} \quad t = 0 \\ T &= T_2(t) \quad \text{при} \quad y = 0 \end{aligned} \tag{3.2'}$$

$$(a^2 - 4C^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4C\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha a^2 \frac{\partial T}{\partial y} \tag{3.3'}$$

$$u = f(y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(y) + 2Cf'(y) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{3.4'}$$

$$u = \psi(t) \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{3.5'}$$

Применяя одностороннее преобразование Лапласа к уравнениям (3.1′) и (3.3′) с учетом (3.2′) и (3.4′), получим

$$\frac{d^2\overline{T}}{\partial y^2} + 2b^2C\frac{d\overline{T}}{\partial y} - b^2p\overline{T} = -b^2T_1(y) \tag{3.6}$$

$$(a^2 - 4C^2)\frac{d^2\overline{u}}{dy^2} + 4Cp\frac{d\overline{u}}{dy} - p^2\overline{u} = \Phi(p, y) \tag{3.7}$$

где

$$\overline{T} = \int_0^\infty Te^{-pt}dt, \quad \overline{u} = \int_0^\infty ue^{-pt}dt$$
$$\Phi(p, y) = \alpha a^2\frac{d\overline{T}}{dy} + 2Cf' - pf - \varphi \tag{3.8}$$

Решения уравнений (3.6) и (3.7) будут

$$\overline{T} = c_1e^{k_1y} + c_2e^{k_2y} - \frac{b^2}{k_1 - k_2}\left\{\int_0^y T_1(\xi)\left[e^{k_1(y-\xi)} - e^{k_2(y-\xi)}\right]d\xi\right. \tag{3.9}$$

$$\overline{u} = c_3e^{k_3y} + c_4e^{k_4y} + \frac{1}{2pa}\int_0^y\Phi(p, \xi)\left[e^{k_4(y-\xi)} - e^{k_3(y-\xi)}\right]d\xi \tag{3.10}$$

Здесь

$$k_1 = -b^2C\left[1 + \sqrt{1 + p/b^2C^2}\right], \quad k_2 = -b^2C\left[1 - \sqrt{1 + p/b^2C^2}\right]$$
$$k_3 = -\frac{p}{a - 2C}, \quad k_4 = \frac{p}{a + 2C} \tag{3.11}$$

Для постоянных интегрирования с учетом (3.2′) и (3.5′) получим

$$c_1 + c_2 = \overline{T}_2(p)$$
$$c_3 + c_4 = \overline{\psi}(p) \tag{3.12}$$

где $\overline{T}_2(p)$ и $\overline{\psi}(p)$ — преобразования функций $T_2(t)$ и $\psi(t)$ соответственно.

Два других условия для определения постоянных интегрирования дают условия ограниченности $\overline{T}$ и $\overline{u}$ на бесконечности.

Имея $\overline{T}$ и $\overline{u}$, температурную функцию T и перемещение u, определяем обратным преобразованием

$$T = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\overline{T}e^{pt}dp \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\overline{u}e^{pt}dp \tag{3.13}$$

В частном случае, когда $T_1(x)=0$ и $T_2(t)=T_0$, для c_i получаем значения

$$c_1=\frac{T_0}{p}, \qquad c_2=0 \tag{3.14}$$

Из (3.8) в силу (3.9), (3.11) и (3.14) имеем

$$T=\frac{T_0}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{p}\,e^{-b^2C[1+\sqrt{1+p/b^2C^2}]+pt}\,dp \tag{3.15}$$

Подынтегральная функция имеет полюс в точке $p=0$ и точку ветвления в $p=-b^2C^2$. Для подсчета интеграла (3.15) возьмем этот же интеграл по замкнутому контуру L (фиг. 1), воспользуемся теоремой Коши и леммой Жордана.

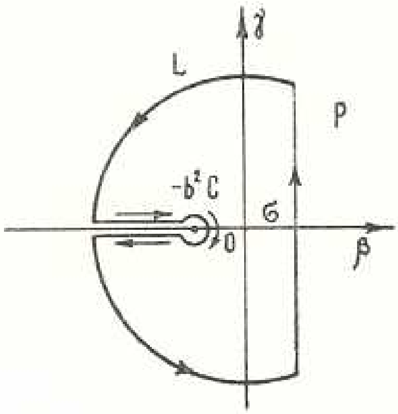

Рис. 1.

Окончательно будем иметь

$$T=T_0e^{-b^2Cy}\left[e^{-b^2Cy}-\frac{e^{-b^2C^2t}}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-zt}\sin\sqrt{z}\,by}{z+b^2C^2}\,dz\right] \tag{3.16}$$

Интеграл (3.15) можно взять еще иначе, если воспользоваться теоремами [3] операционного исчисления, тогда он выразится через табулированную функцию

$$T=T_0e^{-b^2Cy}\left[e^{-b^2C^2t}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{b^2y}{2\sqrt{t}}\right)+b^2C^2\int\limits_0^t e^{-b^2C^2\tau}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{b^2y}{2\sqrt{\tau}}\right)d\tau\right] \tag{3.17}$$

$$\mathrm{Erf}\,(z)=1-\mathrm{erf}\,(z), \qquad \mathrm{erf}\,(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\xi^2}d\xi \tag{3.18}$$

В частном случае, когда отсутствует движение края ($C=0$), из (3.16) или (3.17) получится известный результат [3].

Для решения упругой части задачи предположим, например, $f(x) = \varphi(x) = \psi(t) = 0$. Тогда с учетом (3.12), (3.15) и условия конечности $\bar{u}$ в бесконечности для c_3 и c_4 получим

$$c_3 + c_4 = 0, \quad c_3 = -\frac{\alpha a^2 T_0}{p^2} \frac{1 + \sqrt{1 + p/b^2C^2}}{1 + \sqrt{1 + p/b^2C^2} + p/b^2C\,(a + 2C)} \tag{3.19}$$

Таким образом, для изображающей функции $\bar{u}(p, y)$ из (3.10), (3.19) будем иметь

$$\bar{u} = \frac{\alpha a^2 T_0}{p\,(a^2 - 4C^2)} \times$$

$$\times \frac{1 + \sqrt{1 + p/b^2C^2}}{[1 + \sqrt{1 + p/b^2C^2} + p/b^2C\,(a + 2C)]\,[p/(a - 2C) - b^2C - \sqrt{b^4C^2 - b^2p}]} \times$$

$$\times \left[e^{-b^2C(1 + \sqrt{1 + p/b^4C^2})y} - e^{-py/a - 2c} \right] \tag{3.20}$$

Подставляя (3.20) в (3.13) и беря контурный интеграл по L (фиг. 1) для $u(y, t)$, окончательно получим

$$u = \frac{\alpha a^2 T_0}{a^2 - 4C^2} \left\{ \frac{e^{-2b^2Cy}}{2b^2C} + \frac{e^{-b^2C^2t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{(x + b^2C^2)\,(b^2x + \zeta(x))\,(b^2x + \eta^2(x))} \times \right.$$

$$\times \left[b\sqrt{x} \left(e^{\frac{x + b^4C^2}{a - 2C}y} - e^{-b^2Cy} \cos x \right) \left(\eta(x)\,(\zeta(x) - b^2C) + b^2\,(x - C\zeta(x)) \right) + \right.$$

$$\left. \left. + b^2 \sin x \left(\eta(x)\,(C\zeta(x) + x) + x(\zeta(x) - b^2C) \right) \right] dx \right\} \tag{3.21}$$

где

$$\zeta(x) = \frac{b^2aC + b^2C^2 - x}{a + 2aC}, \quad \eta(x) = \frac{x - C^2b^2 + aCb^2}{a - 2C} \tag{3.22}$$

4. Очень простое решение температурной задачи получается в случае, когда полубесконечный стержень укорачивается в виде

$$x = C\sqrt{t} \tag{4.1}$$

и заданы следующие начальное и краевое условия:

$$T = A = \text{const при } t = 0 \text{ и } T = B = \text{const при } x = C\sqrt{t} \tag{4.2}$$

В этом случае введением новой переменной

$$y = x/C\sqrt{t} \tag{4.3}$$

уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{d^2T}{dy^2} + \frac{b^2C^2}{2}\,y\,\frac{dT}{dy} = 0 \tag{4.4}$$

Решение (4.4) будет

$$T = c_1 \operatorname{erf}(z) + c_2, \qquad z = \frac{bC}{2} y \tag{4.5}$$

Удовлетворив условиям (4.2), для T окончательно будем иметь

$$T = \frac{A\left[\operatorname{erf}\left(\frac{bC}{2} y\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{bC}{2}\right)\right] + B \operatorname{Erf}\left(\frac{bC}{2} y\right)}{\operatorname{Erf}\left(\frac{bC}{2}\right)} \tag{4.6}$$

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступила 12 I 1967

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է ջերմային դաշտում գտնվող գլանային թաղանթի տատանումները։ Թաղանթի երկարությունը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է տված օրենքով։ Սահմանային պայմանները դրվում են փոփոխվող եզրերում։

Ջերմահաղորդականության (1,2), (1,3) և տատանումների (1,7) հավասարումները Գալյորկինի մեթոդով բերվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների։

Տրված է կիսաանվերջ ձող-թաղանթի երկայնական տատանումների ճշգրիտ լուծումը, երբ նրա եզրը հավասարաչափ արագությամբ շարժվում է և եզրում էլ տված է հաստատուն ջերմություն։

L. A. MOVSISIAN

THE HEAT PROBLEM FOR CYLINDRICAL SHELLS OF VARIABLE LENGTH

S u m m a r y

The vibrations of cylindrical shells in a temperature field are considered, when their length is a function of time.

The equations of conduction of heat (1.2), (1.3) and equations of vibrations (1.7) are solved by the method of Galerkin.

The exact solution of the problem of longitudinal vibrations for semi-infinite rod-shell is given when its edge uniformly moves and the constant temperature at this edge is known.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла. ПММ, т. 24, вып. 2, 1960.
2. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. Изд-во „Наука", М., 1964.
3. *Лаврентьев М. А.* и *Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, М.—Л., 1951.