

Г. Е. БАГДАСАРЯН, М. В. БЕЛУБЕКЯН

## ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматриваются осесимметричные колебания упругой цилиндрической оболочки бесконечной длины, изготовленной из материала с конечной постоянной электропроводностью при наличии продольного магнитного поля. Магнитные и диэлектрические проницаемости оболочки принимаются равными единице.

Совместным решением уравнений Максвелла и уравнения движения оболочки определяются индуцированное электромагнитное поле и частота колебаний оболочки в зависимости от интенсивности заданного магнитного поля и проводимости материала оболочки.

1. Введем цилиндрическую систему координат  $r, \theta, x$ , совместив полярную ось  $x$  с осью оболочки. Вектор напряженности магнитного поля  $H_0$  направлен вдоль оси  $x$ .

В отношении тонкой пологой оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

В силу принятых предположений для рассматриваемой задачи получаются следующие исходные уравнения:

уравнения магнитоупругости оболочки [1]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \left( \bar{E} + \frac{1}{c} \bar{v} \times \bar{H} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{H} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

уравнение движения оболочки [2]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2Eh}{R^2} w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z \quad \left( D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \right) \quad (1.2)$$

Здесь  $H$  и  $E$  — векторы напряженностей магнитного и электрического полей,  $v$  — вектор скорости перемещения частиц оболочки,  $\sigma$  — проводимость материала оболочки,  $c$  — скорость света в пустоте,  $2h$  — толщина,  $R$  — радиус,  $E$  — модуль упругости,  $w$  — прогиб,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\rho$  — плотность материала оболочки,  $Z$  — нормальная внешняя нагрузка, приложенная к срединной поверхности оболочки

$$Z = -2\rho h \frac{\partial w}{\partial t} + \int_{R-h}^{R+h} F dr \quad (1.3)$$

В выражении (1.3)  $\varepsilon$  — коэффициент линейного затухания,  $F_r$  — нормальная составляющая поперечной силы, которая имеет вид [1]

$$\bar{F} = \frac{\sigma}{c} \left( \bar{E} + \frac{1}{c} \bar{v} \times \bar{H} \right) \times \bar{H} \quad (1.4)$$

Уравнения электродинамики для вакуума [1] имеют вид

$$\operatorname{rot} \bar{H}^{(n)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}^{(n)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \bar{E}^{(n)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}^{(n)}}{\partial t} \quad (n = 1, 2) \quad (1.5)$$

где индекс  $n = 1$  относится к области  $r < R - h$  (внутренняя область), а  $n = 2$  — к области  $r > R + h$  (внешняя область).

Предполагая, что возмущения малы, принимая  $H = H_0 + h$  и линеаризуя исходные уравнения (1.1) и (1.4), после некоторых преобразований для осесимметричной задачи получим

$$\Delta h_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_x}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial h_x}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma H_0}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} - \frac{4\pi\sigma}{c} E_0 = \frac{\partial h_r}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial r} + \frac{4\pi\sigma H_0}{c^2} \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial h_r}{\partial t} = \frac{\partial E_0}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$F_r = -\frac{\sigma H_0}{c} \left( \frac{H_0}{c} \frac{\partial w}{\partial t} - E_0 \right) \quad (1.7)$$

Уравнения, определяющие  $h_x^{(n)}$ ,  $h_r^{(n)}$  и  $E_0^{(n)}$ , имеют вид

$$\Delta h_x^{(n)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_x^{(n)}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial h_r^{(n)}}{\partial t} = \frac{\partial E_0^{(n)}}{\partial x}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_0^{(n)}}{\partial t} = \frac{\partial h_r^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial h_x^{(n)}}{\partial r} \quad (1.8)$$

Решения систем (1.6) и (1.8) должны удовлетворять следующим общим граничным условиям на колеблющихся поверхностях оболочки:

$$h_x = h_x^{(1)}, \quad h_r = h_r^{(1)}, \quad E_0 = E_0^{(1)} \quad \text{при} \quad r = R - h$$

$$h_x = h_x^{(2)}, \quad h_r = h_r^{(2)}, \quad E_0 = E_0^{(2)} \quad \text{при} \quad r = R + h \quad (1.9)$$

2. Решения уравнений (1.2), (1.6) и (1.8) будем искать в виде волн, распространяющихся вдоль оболочки

$$w = w_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (2.1)$$

$$h_x = f(r) e^{i(\omega t - kx)}, \quad h_x^{(n)} = f_n(r) e^{i(\omega t - kx)}$$

$$h_r = \psi(r) e^{i(\omega t - kx)}, \quad h_r^{(n)} = \psi_n(r) e^{i(\omega t - kx)} \quad (2.2)$$

$$E_0 = \varphi(r) e^{i(\omega t - kx)}, \quad E_0^{(n)} = \varphi_n(r) e^{i(\omega t - kx)}$$

Здесь все функции от  $r$  являются неизвестными и подлежат определению,  $k = \pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина полуволны,  $\omega$  — частота колебаний.

Подставляя (2.1) и (2.2) в системы (1.6) и (1.8), получим уравнения, определяющие указанные неизвестные функции

$$\begin{aligned} f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \nu^2 f(r) &= A \frac{\omega_0}{r} \\ f_n''(r) + \frac{1}{r} f_n'(r) - \nu_1^2 f_n(r) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= -\frac{i\omega_0}{c\nu^2} [f'(r) - A\omega_0], \quad \psi(r) = -\frac{ck}{\omega} \varphi(r) \\ \varphi_n(r) &= -\frac{i\omega}{c\nu_1^2} f_n'(r), \quad \psi_n(r) = -\frac{ck}{\omega} \varphi_n(r) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\nu_1 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \nu^2 = \nu_1^2 + i\omega \frac{4\pi\epsilon}{c^2}, \quad A = i\omega \frac{4\pi\epsilon H_0}{c^2}$$

Принимается, что  $V^2/c^2 < 1$  ( $V = \omega/k$  — фазовая скорость распространения упругих волн). Тогда решения уравнений (2.3) представляются в виде

$$\begin{aligned} f(r) &= C_1 I_0(\nu r) + C_2 K_0(\nu r) + A\omega_0 \int_{k-h}^r [I_0(\nu r) K_0(\nu s) - K_0(\nu r) I_0(\nu s)] ds \\ f_n(r) &= C_1^{(n)} I_0(\nu_1 r) + C_2^{(n)} K_0(\nu_1 r) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $I_0$  и  $K_0$  — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка.

Известно, что функция  $K_0$  в начале координат имеет особенность, а функция  $I_0$  неограниченно возрастает при  $r \rightarrow \infty$ , поэтому следует положить  $C_2^{(1)} = C_1^{(2)} = 0$ . Удовлетворяя граничным условиям (1.9), определяем остальные постоянные интегрирования и, следовательно, согласно (2.2), (2.4) и (2.5), интересующие нас величины  $h_x$ ,  $h_r$ ,  $E_0$ ,  $h_x^{(n)}$ ,  $h_r^{(n)}$ ,  $E_0^{(n)}$ . Выражения постоянных интегрирования и указанных величин ввиду громоздкости здесь не приводятся.

В случае, когда  $\nu_1 R \gg 1$  (тогда и  $|\nu| R \gg 1$ ), можно применить асимптотические формулы функций Бесселя. Выражения для постоянных интегрирования существенно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A}{\nu} \left( \frac{\pi}{2\nu R} \right)^{1/2} \frac{1}{(\nu^2 + \nu_1^2) \operatorname{sh} 2\nu h + 2\nu\nu_1 \operatorname{ch} 2\nu h} \{ 2\nu R (\nu_1^2 \operatorname{sh} \nu h + \\ &+ \nu\nu_1 \operatorname{ch} \nu h) - (\nu_1 + \nu) [\nu_1 \operatorname{sh} 2\nu h + \nu (\operatorname{ch} 2\nu h - 1)] e^{\nu h} \} e^{-\nu R} \omega_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= -\frac{A}{v} (2\pi v R)^{1/2} \frac{1}{(v^2 + v_1^2) \operatorname{sh} 2vh + 2vv_1 \operatorname{ch} 2vh} \{2vR (v_1^2 \operatorname{sh} vh + \\
 &\quad vv_1 \operatorname{ch} vh) - (v_1 - v) [v_1 \operatorname{sh} 2vh + v (\operatorname{ch} 2vh - 1)] e^{-vh}\} e^{iR} w_0 \\
 C_1^{(1)} &= -\frac{A}{v^2} \left(\frac{\pi v_1}{2R}\right)^{1/2} \frac{1}{(v^2 + v_1^2) \operatorname{sh} 2vh + 2vv_1 \operatorname{ch} 2vh} \{vR (v_1^2 \operatorname{sh} vh + \\
 &\quad + vv_1 \operatorname{ch} vh) \operatorname{sh} vh + 2v_1 [v_1 \operatorname{sh} 2vh + v (\operatorname{ch} 2vh - 1)]\} e^{-v(R-h)} w_0 \quad (2.6) \\
 C_2^{(2)} &= \frac{A}{v^2} \left(\frac{v_1}{2\pi R}\right)^{1/2} \frac{1}{(v^2 + v_1^2) \operatorname{sh} 2vh + 2vv_1 \operatorname{ch} 2vh} \{vR (v_1^2 \operatorname{sh} vh + \\
 &\quad + vv_1 \operatorname{ch} vh) \operatorname{sh} vh - 2v_1 [v_1 \operatorname{sh} 2vh + v (\operatorname{ch} 2vh - 1)]\} e^{-v(R-h)} w_0
 \end{aligned}$$

Таким образом, имея в виду соотношения (2.2), (2.4) — (2.6), индуцированное электромагнитное поле, обусловленное возмущенным движением оболочки, можно считать определенным. В свою очередь электромагнитное поле вызывает дополнительную нагрузку, действующую на оболочку, которая определяется формулой (1.7). Подставляя значение  $E_0$  в (1.7) и используя (1.3), для суммарной поперечной нагрузки найдем следующее выражение:

$$Z = -2vh \left\{ \varepsilon + \frac{\sigma H_0^2}{ic^2} \frac{v_1^2}{v^2} \right\} \left[ 1 + i\omega \frac{8\pi\sigma}{c^2 vv_1 h} \frac{(v_1 \operatorname{sh} vh + v \operatorname{ch} vh) \operatorname{sh} vh}{(v^2 + v_1^2) \operatorname{sh} 2vh + 2vv_1 \operatorname{ch} 2vh} \right] \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \right\} \quad (2.7)$$

3. Переходим к решению уравнения движения оболочки. Подстановка (2.7) в (1.2) с учетом (2.1) приводит к следующему характеристическому уравнению для определения частоты колебаний:

$$\omega^2 - i\omega \left\{ \varepsilon + \frac{\sigma H_0^2}{ic^2} \frac{v_1^2}{v^2} \right\} \left[ 1 + i\omega \frac{8\pi\sigma}{c^2 vv_1 h} \frac{(v_1 \operatorname{sh} vh + v \operatorname{ch} vh) \operatorname{sh} vh}{(v^2 + v_1^2) \operatorname{sh} 2vh + 2vv_1 \operatorname{ch} 2vh} \right] - \Omega^2 = 0 \quad (3.1)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{D}{2\rho h} k^4 + \frac{E}{\rho R^2}$$

— квадрат частоты собственных осесимметричных колебаний в отсутствии магнитного поля.

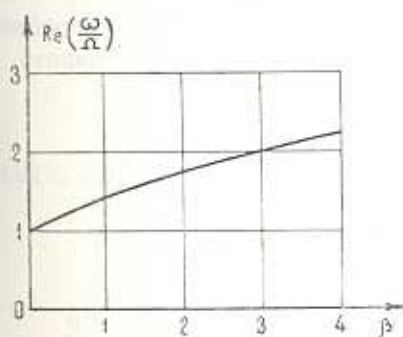
В случае, когда материал оболочки идеально проводящий ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), уравнение (3.1) существенно упрощается и принимает вид

$$\omega^2 - i2\omega - \Omega^2 - \frac{H_0^2 v_1^2}{4\pi\rho} \left( 1 + \frac{2}{v_1 h} \right) = 0 \quad (3.2)$$

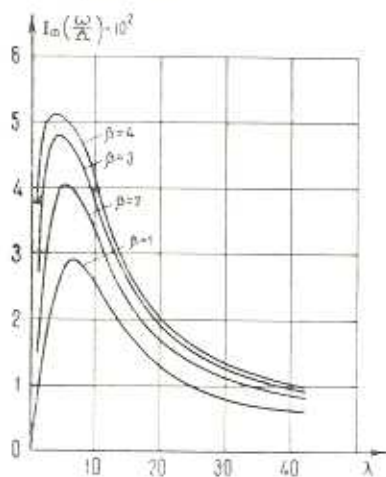
Принимая  $V^2/c^2 \ll 1$  и пренебрегая демпфированием ( $\varepsilon = 0$ ), из (3.2) получим частоту собственных колебаний оболочки в зависимости от напряженности магнитного поля

$$\omega^2 = \Omega^2 + k^2 \frac{H_0^2}{4\pi\sigma} \left(1 + \frac{2}{kh}\right) \quad (3.3)$$

На фиг. 1 и 2 представлены графики зависимостей частоты колебаний ( $\text{Re}\omega$ ) и величины, характеризующей затухание колебаний ( $\text{Im}\omega$ ) от параметров  $\lambda$  и  $\beta$  при  $\varepsilon = 0$ . Параметр  $\lambda = 4\pi\Omega\sigma/c^2k^2$  характеризует проводимость материала оболочки, а параметр  $\beta = k(1 + kh)H_0^2/4\pi\sigma h\Omega^2$  характеризует напряженность заданного магнитного поля. Оказывается, что при больших  $\lambda$  влияние проводимости на частоту колебаний незначительно. Поэтому на фиг. 1 приведена лишь одна кривая ( $\lambda = 10$ ), которая показывает, что с увеличением напряженности магнитного поля частота колебаний увеличивается.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Из фиг. 2 видно, что при возрастании параметра  $\beta$  усиливается затухающее действие магнитного поля. С увеличением же проводимости материала оболочки коэффициент затухания вначале увеличивается, достигая максимума для определенного значения  $\lambda$ , после чего начинает уменьшаться и принимает значение нуль для идеально проводящего материала (формула (3.3)).

4. Аналогичным образом задача решается и для случая бесконечной пластинки. При этом фундаментальными решениями уравнений Максвелла будут гиперболические функции. Выражения постоянных интегрирования имеют довольно простой вид, и нет необходимости в окончательных результатах применять асимптотические представления фундаментальных функций.

Решения уравнений Максвелла рассматриваемой задачи, после удовлетворения граничным условиям, имеют вид

$$\begin{aligned}
 h_x &= \frac{A\gamma \operatorname{sh} \nu z}{\nu} w, & h_z &= -\frac{ikA}{\nu^2} (1 - \gamma \operatorname{ch} \nu z) w \\
 E_y &= -\frac{i\omega A}{c\nu^2} (1 - \gamma \operatorname{ch} \nu z) w \\
 h_x^{(1)} &= -\frac{A\gamma \operatorname{sh} \nu h}{\nu} e^{\nu(z+h)} w, & h_x^{(2)} &= \frac{A\gamma \operatorname{sh} \nu h}{\nu} e^{-\nu(z-h)} w \\
 h_z^{(1)} &= -\frac{ikA}{\nu\nu_1} e^{\nu(z+h)} w, & h_z^{(2)} &= -\frac{ikA\gamma \operatorname{sh} \nu h}{\nu\nu_1} e^{-\nu(z-h)} w \\
 E_y^{(1)} &= -\frac{i\omega A\gamma \operatorname{sh} \nu h}{c\nu\nu_1} e^{\nu(z+h)} w, & E_y^{(2)} &= -\frac{i\omega A\gamma \operatorname{sh} \nu h}{c\nu\nu_1} e^{-\nu(z-h)} w
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\gamma = \frac{2\nu_1 (\nu_1 \operatorname{sh} \nu h + \nu \operatorname{ch} \nu h)}{(\nu^2 + \nu_1^2) \operatorname{sh} 2\nu h + 2\nu\nu_1 \operatorname{ch} 2\nu h}$$

Используя (4.1), для поперечной нагрузки, действующей на пластинку, получаем выражение, полностью совпадающее с (2.7). Следовательно, для оболочки за поперечную нагрузку в первом приближении асимптотического представления ( $|\nu|R \gg 1$ ) можно принять нагрузку, действующую на пластинку.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 25 IV 1967

Գ. Ե. ԲԱԳԴԱՍԱՐՅԱՆ, Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ԳՂԱՆԱՅԻՆ ԹԱԳԱՆԹԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ  
ՄԱԳՆԵՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Դիտարկված է առաձգական, երկար զլանալին թաղանթի առանցքա-  
սիմետրիկ տատանումները երկախական մագնիսական դաշտում, երբ թա-  
ղանթի նյութը ունի հաստատուն էլեկտրահաղորդականություն:

Համատեղ լուծելով էլեկտրոդինամիկալի և թաղանթի շարժման հա-  
վասարումները, որոշված են ինդուկցված էլեկտրամագնիսական դաշտը և  
թաղանթի տատանման հաճախականությունը՝ կախված աված մագնիսական  
դաշտի լարվածությունից և թաղանթի նյութի հաղորդականությունից:

Ցույց է տրված, որ մագնիսական դաշտի առկայությունը փոքրացնում  
է թաղանթի տատանման հաճախականությունը:

G. E. BAGDASARIAN, M. V. BELUBEKIAN

## AXISYMMETRIC OSCILLATIONS OF THE CYLINDRICAL SHELL IN THE MAGNETIC FIELD

## S u m m a r y

Axisymmetric oscillations of a cylindrical shell of an infinite length with constant electroconductivity in the presence of the longitudinal magnetic field are considered.

Induced electromagnetic field and frequency of oscillations of the shell are defined.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е. Флаттер цилиндрической оболочки, находящейся в поле действия высоких температур. Изв. АН СССР, ОТИ, № 5, 1964.