

А. А. БАБЛОЯН, В. Г. СААКЯН

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Исследованием плоской смешанной задачи теории упругости для круговой области занимались многие авторы [1—5 и др.], но методы, которыми они пользовались, не позволяют решать те же задачи для кольцевой области.

В настоящей работе дается точное решение задачи о плоской деформации кругового кольца при действии по одному из контуров симметрично расположенных m одинаковых штампов ($m > 1$). Задача сводится к решению парных рядов-уравнений, содержащих тригонометрические функции. Эти парные уравнения сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что получающаяся бесконечная система в общем случае квази-вполне регулярна, а свободные члены при возрастании индекса стремятся к нулю. В рассмотренных примерах эта система оказалась вполне регулярной.

В частном случае из рассмотренных задач получаются решения для круга и плоскости с круговым отверстием.

Отметим, что приведенный метод решения пока не позволяет рассматривать случаи произвольного расположения штампов.

1. Постановка задачи

Известно [1], что в плоской задаче теории упругости напряжения могут быть определены через одну бигармоническую функцию (функцию Эри) формулами

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, & \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0 \quad (1.2)$$

Если в уравнение (1.2) ввести новую переменную и новую неизвестную функцию

$$r = ae^t, \quad F(t, \varphi) = \frac{\alpha}{r} \Phi(r, \varphi) \quad (1.3)$$

то для определения функции $F(t, \varphi)$ из (1.2) получим следующее дифференциальное уравнение*:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F = 0 \quad (1.4)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию $F(t, \varphi)$ формулами [7]

$$\sigma_r = \frac{e^{-t}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + F \right), \quad \sigma_\varphi = \frac{e^{-t}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right), \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{e^{-t}}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi} \quad (1.5)$$

$$u = \frac{1+\sigma}{aE} \left[(1-\sigma) \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \right) dt + (1-2\sigma) F - z \frac{\partial F}{\partial t} \right] + f'(\varphi)$$

$$v = \frac{1-\sigma^2}{aE} \left[\int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} - F \right) d\varphi - \iint F dt d\varphi - \int \frac{\partial F}{\partial \varphi} dt - \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right] - f(\varphi) + f_0(t) \quad (1.6)$$

где σ — коэффициент Пуассона, а функции $f_0(t)$ и $f(\varphi)$ имеют вид

$$f_0(t) = a_0 e^t, \quad f(\varphi) = b \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (1.7)$$

Функцию $F(t, \varphi)$ для кругового кольца ищем в виде

$$F(t, \varphi) = b(t) + \sum_{k=1}^{\infty} W_k(t) \cos \lambda_k \varphi \quad (1.8)$$

где

$$W_k'(t) = E_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} (t_1 - t) + G_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t + F_k \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} (t_1 - t) + H_k \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} t$$

$$b(t) = b_0 e^t + b_1 t e^{-t} \quad (1.9)$$

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_1} = km, \quad t_1 = \ln \frac{b}{a}, \quad b > a \geq 0 \quad (1.10)$$

m — число штампов, a и b — радиусы кругового кольца.

Подставив (1.8) в (1.5) и (1.6), для напряжений и перемещений получим следующие выражения:

$$a^2 e^t \tau_{r\varphi}(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k W_k'(t) \sin \alpha_k \varphi$$

$$a^2 e^t \sigma_r(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} [W_k'(t) - (\alpha_k^2 - 1) W_k(t)] \cos \alpha_k \varphi + b(t) + b'(t) \quad (1.11)$$

* Подобное преобразование бигармонического уравнения для биполярных координат сделано в книге Я. С. Уфлянда [6].

$$a^2 e^t \sigma_\varphi(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k^*(t) + \Psi_k'(t)] \cos 2_k \varphi + b'(t) + b''(t) \quad (1.11)$$

$$u(t, \varphi) = \frac{1+\sigma}{aE} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-\sigma)(1-\alpha_k^2) \int \Psi_k(t) dt + (1-2\sigma) \Psi_k(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma \Psi_k'(t) \right] \cos 2_k \varphi + (1-\sigma) \int b(t) dt + (1-2\sigma) b(t) - \sigma b'(t) \right\} \quad (1.12)$$

$$v(t, \varphi) = \frac{1-\sigma^2}{aE} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Psi_k^*(t) + \Psi_k'(t) + \left(\frac{\alpha_k^2}{1-\sigma} - 1 \right) \Psi_k(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\alpha_k^2 - 1) \int \Psi_k(t) dt \right] \frac{\sin 2_k \varphi}{2_k} + \varphi \left[b''(t) + b'(t) - b(t) - \int b(t) dt \right] \right\}$$

2. Решение задач

Здесь мы рассмотрим две группы контактных (смешанных) задач для кругового кольца: 1) смешанные граничные условия заданы на внешнем контуре, а внутренний контур либо свободен от внешних нагрузок, либо касается без трения жесткого включения, либо же жестко заземлен; 2) смешанные граничные условия заданы на внутреннем контуре (при аналогичных первой группе задач предположениях относительно внешнего контура).

Во всех задачах принимаем, что трение между штампами и упругим материалом отсутствует, все штампы одинаковы и на контуре кругового кольца они расположены симметрично.

В силу симметрии области и граничных условий, функцию $F(t, \varphi)$ отыскиваем только в 1/2-ой части области (фиг. 1). При этом на осях симметрии должны удовлетворяться условия

$$v(t, \varphi) = \tau_{r\varphi}(t, \varphi) = 0 \quad \text{при } \varphi = 0, \varphi_1 \quad (2.1)$$

Таким образом, в задачах первой группы граничные условия на внешней окружности имеют вид

$$\begin{aligned} u(t_1, \varphi) &= f_1(\varphi) & (0 < \varphi < \varphi_0) \\ \sigma_r(t_1, \varphi) &= f_2(\varphi) & (\varphi_0 < \varphi < \varphi_1) \\ \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) &= 0 & (0 < \varphi < \varphi_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

а на внутреннем контуре заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, \varphi) = \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= 0 & (\text{задача 1}) \\ u(0, \varphi) = \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= 0 & (\text{задача 2}) \quad (0 < \varphi < \varphi_1) \\ u(0, \varphi) = v(0, \varphi) &= 0 & (\text{задача 3}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

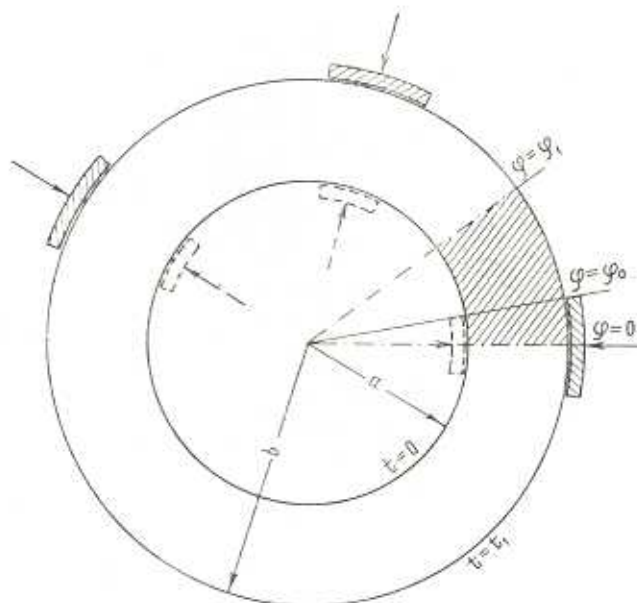
В задачах второй группы граничные условия на внутренней окружности имеют вид

$$\begin{aligned} u(0, \varphi) &= f_1(\varphi) & (0 < \varphi < \varphi_0) \\ \sigma_r(0, \varphi) &= f_2(\varphi) & (\varphi_0 < \varphi < \varphi_1) \\ \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= 0 & (0 < \varphi < \varphi_1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

а на внешнем контуре граничными условиями будут

$$\begin{aligned} \sigma_r(t_1, \varphi) = \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) &= 0 & \text{(задача 4)} \\ u(t_1, \varphi) = \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) &= 0 & \text{(задача 5)} \quad (0 < \varphi < \varphi_1) \\ u(t_1, \varphi) = v(t_1, \varphi) &= 0 & \text{(задача 6)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отметим, что граничные условия (2.3) и (2.5) лишь ради простоты изложения приняты нулевыми. Для простоты принято нулевым также касательное напряжение на контуре, где приложены штампы.



Фиг. 1.

Решение этих же задач при ненулевых граничных условиях новых принципиальных затруднений не вызывает.

Рассмотрим теперь первую задачу. Удовлетворяя граничным условиям (2.2) и первым из (2.3), с учетом (1.9), для неизвестных коэффициентов получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} H_k = E_k = 0, \quad 2b_0 + b_1 &= 0 \\ G_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 - F_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\alpha_k^2} \left[G_k \left(\operatorname{ch} t_1 + \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \operatorname{sh} t_1 \right)^{\alpha_k} + \right. \\ \left. + F_k \left(\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \right) \right] \cos \alpha_k \varphi + \\ + \frac{2(1-2\sigma) b_0 e^{t_1} - b_1 e^{-t_1}}{2(1-\sigma)} = \frac{aE}{2(1-\sigma^2)} f_1(\varphi) \quad (0 < \varphi < \varphi_0) \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [G_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 - F_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1] \cos \alpha_k \varphi + 2b_0 e^{t_1} + b_1 e^{-t_1} = a^2 e^{t_1} f_2(\varphi) \quad (\varphi_0 < \varphi < \varphi_1)$$

Легко проверить, что путем введения новых неизвестных

$$\begin{aligned} kX_k &= G_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 - F_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \\ X_0 &= 2b_0 e^{t_1} + b_1 e^{-t_1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

парные уравнения (2.7), с учетом (2.6), можно свести к виду

$$\begin{aligned} \lambda X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - N_k) X_k \cos \alpha_k \varphi &= \overline{f_1(\varphi)} \quad (0 < \varphi < \varphi_0) \\ X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos \alpha_k \varphi &= \overline{f_2(\varphi)} \quad (\varphi_0 < \varphi < \varphi_1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

где введены следующие обозначения:

$$\overline{f_1(\varphi)} = \frac{a\sigma E}{2(1-\sigma^2)\varphi_1} f_1(\varphi), \quad \overline{f_2(\varphi)} = a^2 e^{t_1} f_2(\varphi) \quad (2.10)$$

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2 [\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 - 2\sigma_0 \alpha_k^{-1} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1) + \alpha_k \operatorname{sh} 2t_1]}{2(\alpha_k^2 - 1) (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{\varphi_1} \frac{\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{t_1}}{2(1-\sigma) \operatorname{sh} t_1}, \quad \sigma_0 = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \quad (2.12)$$

После нахождения неизвестных коэффициентов X_k , функцию $F(t, \varphi)$ будем определять по формуле (1.8), где

$$\Psi'_k(t) = kX_k \frac{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t_1 + \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} (t_1 - t)}{\alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

$$b(t) = \frac{X_0}{4 \operatorname{sh} t_1} (e^t - 2te^{-t})$$

Таким образом, задача 1 сводится к определению неизвестных коэффициентов X_k из парных рядов-уравнений (2.9).

Аналогичным образом, все остальные задачи можно свести к решению парных рядов-уравнений (2.9), где функции $\overline{f_1(\varphi)}$ и $\overline{f_2(\varphi)}$ для первой группы задач определяются формулами (2.10), а для второй группы задач — теми же формулами, но с подставленным в них значением $t_1 = 0$.

Коэффициент ε_0 всегда имеет значение (2.12), меняются только формулы для N_k , λ , $\Psi'_k(t)$ и $b(t)$. Ниже приведем выражения этих величин, соответствующие отдельным задачам (в некоторых задачах, где функция $\Psi'_k(t)$ имеет сложный вид, вместо нее приводятся значения коэффициентов E_k , G_k , F_k , H_k , входящих в ее выражение).

Задача 2

$$N_k = 1 - \frac{2\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha_k t_1 - \operatorname{ch}^2 t_1 - \varepsilon_0^2 \alpha_k^{-2} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)}{\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} 2t_1 + 2\varepsilon_0 \alpha_k^{-1} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\lambda = \frac{\pi \varepsilon_0 \operatorname{sh} t_1}{\varepsilon_1 (\operatorname{ch} t_1 - \varepsilon e^{-t_1})}, \quad b(t) = X_0 \frac{e^t + 2(1 - 2\varepsilon) t e^{-t}}{4(\operatorname{ch} t_1 - \varepsilon e^{-t_1})} \quad (2.14)$$

$$\Psi'_k(t) = \frac{kX_k}{2^{-1} (\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} 2t_1) + \varepsilon_0 \alpha_k^{-1} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)} \left[(\operatorname{ch} t_1 - \varepsilon_0 \alpha_k^{-1} \operatorname{sh} t_1) \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t - (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + \varepsilon_0 \alpha_k^{-1} \operatorname{sh} \alpha_k t_1) \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} (t_1 - t) \right] \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Задача 3

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \left[\frac{2(1 - \varepsilon)(y - \varepsilon x)}{\Delta} + \frac{\tilde{x} - \tilde{\varepsilon} y}{\alpha_k} \right] \frac{1}{\varepsilon \alpha_k \operatorname{sh} t_1 + \operatorname{sh} \alpha_k t_1}$$

$$\lambda = \frac{\pi \varepsilon_0 \operatorname{sh} t_1}{\varepsilon_1 (\operatorname{ch} t_1 - \varepsilon e^{-t_1})}, \quad b(t) = X_0 \frac{e^t + 2(1 - 2\varepsilon) t e^{-t}}{4(\operatorname{ch} t_1 - \varepsilon e^{-t_1})} \quad (2.15)$$

$$E_k = \frac{\alpha_k (y - \varepsilon x)}{\Delta (\varepsilon \alpha_k \operatorname{sh} t_1 + \operatorname{sh} \alpha_k t_1)} X_k, \quad H_k = 0$$

$$G_k = \frac{\alpha_k \varepsilon}{\varepsilon \alpha_k \operatorname{sh} t_1 + \operatorname{sh} \alpha_k t_1} X_k, \quad F_k = -\frac{\alpha_k}{\varepsilon} X_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Задача 4

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2 [\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} 2t_1 + 2\varepsilon_0 \alpha_k^{-1} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 + \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)]}{2(\alpha_k^2 - 1) (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)}$$

$$\lambda = -\frac{\pi \operatorname{ch} t_1 - \varepsilon e^{-t_1}}{\varepsilon_1 2(1 - \varepsilon) \operatorname{sh} t_1}, \quad b(t) = -\frac{X_0}{4 \operatorname{sh} t_1} (e^{-(t-t_1)} - 2te^{t-t_1}) \quad (2.16)$$

$$\Psi'_k(t) = kX_k \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t + \alpha_k \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} (t_1 - t)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Задача 5

$$N_k = 1 - \frac{2\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha_k t_1 - \operatorname{ch}^2 t_1 - \sigma_0^2 \alpha_k^{-2} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)}{\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} 2t_1 - 2\sigma_0 \alpha_k^{-1} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)}$$

$$\lambda = -\frac{\pi}{\varphi_1} \frac{\sigma_0 \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{t_1}}, \quad b(t) = X_0 \frac{e^{-(t_1-t)} + 2(1-2\sigma)te^{t_1-t}}{4(\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{t_1})} \quad (2.17)$$

$$\Psi_k'(t) = \frac{kX_k}{2^{-1}(\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} 2t_1) - \sigma_0 \alpha_k^{-1} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)} [(\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \sigma_0 \alpha_k^{-1} \operatorname{sh} \alpha_k t_1) \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t - (\operatorname{ch} t_1 + \sigma_0 \operatorname{sh} t_1) \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} (t_1 - t)]$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Задача 6

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \left[\frac{\widetilde{x} - \widetilde{\varepsilon} y}{\widetilde{\Delta}} + \frac{y - \widetilde{\varepsilon} x}{2(1-\sigma)\alpha_k} \right] \frac{1}{\widetilde{\varepsilon} \operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1}$$

$$\lambda = -\frac{\pi}{\varphi_1} \frac{\sigma_0 \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{t_1}}, \quad b(t) = X_0 \frac{e^{-(t_1-t)} + 2(1-2\sigma)te^{t_1-t}}{4(\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{t_1})} \quad (2.18)$$

$$E_k = 0, \quad F_k = \frac{\alpha_k}{\varepsilon} X_k$$

$$G_k = -\frac{\widetilde{\alpha}_k \widetilde{\varepsilon}}{\widetilde{\varepsilon} \operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1} X_k, \quad H_k = -\frac{\alpha_k (\widetilde{x} - \widetilde{\varepsilon} y)}{\widetilde{\Delta} (\widetilde{\varepsilon} \operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1)} X_k$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

В формулах (2.15) и (2.18) введены следующие обозначения:

$$\varepsilon = \frac{y_1 \Delta - y \delta}{x_1 \Delta - x \delta}, \quad \widetilde{\varepsilon} = \frac{\widetilde{x}_1 \widetilde{\Delta} - \widetilde{x} \widetilde{\delta}}{\widetilde{y}_1 \widetilde{\Delta} - \widetilde{y} \widetilde{\delta}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{array} \right\} = 2(1-\sigma) (\pm \sigma_0 \operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k t_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{array} \right\} = 2(1-\sigma) \left[\mp \left(\frac{\alpha_k^2}{2(1-\sigma)} - 1 \right) \operatorname{sh} t_1 - \operatorname{ch} t_1 \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{y}_1 \end{array} \right\} = 2(1-\sigma) \left[\mp \sigma_0 \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} \alpha_k t_1 \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_1}{y_1} \right\} &= 2(1-\sigma) \left[\mp \left(\frac{\alpha_k^2}{2(1-\sigma)} - 1 \right) \operatorname{sh} t_1 + \operatorname{ch} t_1 \right] \\ \left. \frac{\Delta}{\Delta} \right\} &= 2(1-\sigma) \left[\mp \sigma_0 \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} t_1 \pm \sigma_0 \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} t_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\alpha_k^2}{2(1-\sigma)} + \sigma_0 \right) \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} t_1 - \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} t_1 \right] \\ \left. \frac{\delta}{\delta} \right\} &= 2(1-\sigma) \left[\pm \sigma_0 \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} t_1 \pm \left(\frac{\alpha_k^2}{2(1-\sigma)} - 1 \right) \operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} t_1 - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} t_1 + \operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} t_1 \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

В частных случаях, для круга ($a=0$; $b \neq 0, \infty$) и для плоскости с круговым отверстием ($a \neq 0, \infty$; $b = \infty$), из (2.11) и (2.18) получим:

а) круг [1, 3]

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \left(1 - \frac{\sigma_0}{\alpha_k} \right), \quad \lambda = \frac{\pi \sigma_0}{\varphi_1}, \quad b(t) = \frac{e^t}{2} X_0 \\ \Psi'_k(t) = k X_k e^{\alpha_k t} \operatorname{sh} t \quad (2.20)$$

б) плоскость с круговым отверстием [4]

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \left(1 + \frac{\sigma_0}{\alpha_k} \right), \quad \lambda = -\frac{\pi}{2(1-\sigma)\varphi_1}, \quad b(t) = t e^{-t} X_0 \\ \Psi'_k(t) = -k X_k e^{-\alpha_k t} \operatorname{sh} t \quad (2.21)$$

Отметим, что во всех рассмотренных задачах $\overline{f_2(\varphi)}$ — кусочно-непрерывная функция, $\overline{f_1(\varphi)}$ — непрерывная и имеет кусочно-непрерывную первую производную, а последовательность чисел N_k ($k=1, 2, \dots$) ограничена сверху и при возрастании индекса стремится к нулю, как $O\left(\frac{1}{k}\right)$, т. е. для больших значений индекса k имеем

$$N_k = \pm \frac{\sigma_0}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (2.22)$$

где верхний знак относится к первой, а нижний — ко второй группе задач.

При решении этих задач с ненулевыми граничными условиями (2.2)–(2.5) функции $\overline{f_1(\varphi)}$ и $\overline{f_2(\varphi)}$ имеют вышеуказанные свойства, а числа N_k — тот же вид и порядок.

3. Решение парных рядов-уравнений (2.9)

Парные ряды-уравнения по тригонометрическим функциям (кроме $\cos kx$) были рассмотрены в работах Трантера [8], Снеддона [9], Минкова И. М. [10], Баблюяна А. А. [11, 12] и др.

Эти же уравнения по косинусам исследовались лишь недавно в работах Сривастава [13].

При исследовании уравнений (2.9) будем пользоваться результатами, полученными в работах Сривастава [13] и Баблюяна [12].

В уравнениях (2.9) перейдем к новой переменной

$$x = \frac{\pi\varphi}{\tau_1}, \quad 0 < x \leq \pi \quad (3.1)$$

и введем следующие обозначения:

$$f_i^*(x) = \overline{f_i(\varphi)}, \quad (i = 1, 2), \quad \beta = \frac{\pi\varphi_0}{\tau_1} \quad (3.2)$$

При этом система (2.9) примет вид

$$iX_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - N_k) X_k \cos kx = f_1^*(x) \quad (0 < x < \beta) \quad (3.3)$$

$$X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} kX_k \cos kx = f_2^*(x) \quad (\beta < x < \pi)$$

Умножим первое уравнение (3.3) на $\cos x/2 (\cos x - \cos \vartheta)^{-1/2}$, проинтегрируем по x от 0 до ϑ и продифференцируем полученное соотношение по ϑ . Второе уравнение (3.3) умножим на $\sin x/2 (\cos \vartheta - \cos x)^{-1/2}$ и проинтегрируем по x от ϑ до π .

Используя при этом формулы

$$\begin{aligned} y_k(\cos \vartheta) &= P_{k-1}(\cos \vartheta) + P_k(\cos \vartheta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\vartheta} \frac{\cos kx \cos x/2 dx}{(\cos x - \cos \vartheta)^{1/2}} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin kx \cos x/2 dx}{(\cos \vartheta - \cos x)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} z_k(\cos \vartheta) &= P_{k-1}(\cos \vartheta) - P_k(\cos \vartheta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\vartheta} \frac{\sin kx \sin x/2 dx}{(\cos x - \cos \vartheta)^{1/2}} = \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kx \sin x/2 dx}{(\cos \vartheta - \cos x)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

которые получаются из формул Меллера и Дирихле-Лапласа для ин-

тегральных представлений полиномов Лежандра [14], парные уравнения (3.3) сведем к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k X_k (1 - N_k) z_k(\cos \vartheta) &= F_1(\vartheta) \quad (0 < \vartheta < \beta) \\ \sum_{k=1}^{\infty} k X_k z_k(\cos \vartheta) &= F_2(\vartheta) + 2 X_0 \quad (\beta < \vartheta < \pi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\vartheta) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{tg} \vartheta/2 \frac{d}{d\vartheta} \int_0^{\vartheta} \frac{f_1^*(x) \cos x/2 dx}{(\cos x - \cos \vartheta)^{1/2}} \\ F_2(\vartheta) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{f_2^*(x) \sin x/2 dx}{(\cos \vartheta - \cos x)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функции $z_k(x)$ и $y_k(x)$ образуют ортогональную и полную систему в $L_2(-1, 1)$ [12], т. е. в разложении

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k(x) \quad (-1, 1)$$

коэффициенты a_k в силу

$$\int_{-1}^1 \frac{z_k(x) z_n(x)}{1-x} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n \\ \frac{2}{k} & \text{при } k = n, \end{cases} \quad \int_{-1}^1 \frac{z_k(x)}{1-x} dx = \frac{y_k(x)}{k} \quad (3.8)$$

определяются по формуле

$$a_k = \int_{-1}^1 \frac{f(x) z_k(x)}{1-x} dx \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

Пользуясь (3.8) и (3.9), из (3.6) для определения неизвестных коэффициентов X_k получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} X_k + b_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_{nk} &= \frac{k N_k}{2} \int_0^{\beta} z_k(\cos \vartheta) z_n(\cos \vartheta) \operatorname{ctg} \vartheta/2 d\vartheta = \\ &= -\frac{k N_k}{2} \frac{n y_n(\cos \beta) z_k(\cos \beta) - k y_k(\cos \beta) z_n(\cos \beta)}{n^2 - k^2} \end{aligned}$$

$$a_{nn} = \frac{N_n}{4} \left[2 - 2P_{n-1}(\cos \beta) P_n(\cos \beta) + P_n^2(\cos \beta) - P_{n-1}^2(\cos \beta) - \right. \\ \left. - 4 \sin^2 \beta \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k(\cos \beta) P'_k(\cos \beta)}{k+1} \right] \quad (3.11)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^{\beta} F_1(\vartheta) z_n(\cos \vartheta) \operatorname{ctg} \vartheta/2 d\vartheta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\pi} F_2(\vartheta) z_n(\cos \vartheta) \operatorname{ctg} \vartheta/2 d\vartheta + X_0 \frac{y_n(\cos \beta)}{n} \quad (n, k = 1, 2, \dots)$$

Найденные из (3.10) значения X_k выражаются через X_0 и при любом X_0 удовлетворяют, как в этом легко убедиться, уравнениям (3.6) и второму уравнению (3.3). Эти же значения X_k не удовлетворяют при любом X_0 первому уравнению из (3.3), т. к. при дифференцировании его при переходе к (3.6) член, содержащий X_0 , исчезает.

Исходя из этого, необходимо определить X_0 только из первого уравнения (3.3), подставляя конкретное значение x из области $[0, \beta]$. Например, принимая в этом уравнении $x=0$, для определения коэффициента X_0 получим

$$\lambda X_0 = f_1^*(0) - \sum_{k=1}^{\infty} (1 - N_k) X_k \quad (3.12)$$

Докажем, что система (3.10) квази-вполне регулярна. Так как функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$ являются линейными комбинациями полиномов Лежандра, то при больших k они будут стремиться к нулю как $P_k(x)$ [14], т. е.

$$\left| \frac{y_k(x)}{z_k(x)} \right| \ll \frac{2}{k^{1/2}}, \quad (k \gg 1), \quad |x| < 1 - \varepsilon \quad (3.13)$$

Учитывая (2.22) и (3.13), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k |N_k| \left| \frac{ny_n(\cos \beta) z_k(\cos \beta) - ky_k(\cos \beta) z_n(\cos \beta)}{n^2 - k^2} \right| < \\ < \frac{\sigma_0}{n} + \frac{\sigma_0}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \left| \frac{ny_n(\cos \beta) z_k(\cos \beta) - ky_k(\cos \beta) z_n(\cos \beta)}{n^2 - k^2} \right| < \\ < \frac{\sigma_0}{n} + 2\sigma_0 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\frac{n^{1/2}}{k^{1/2}} + \frac{k^{1/2}}{n^{1/2}}}{|n^2 - k^2|} = \frac{\sigma_0}{n} + \frac{2\sigma_0}{n^{1/2}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2} |n - k|} = \\ = \frac{\sigma_0}{n} + \frac{2\sigma_0}{n^{1/2}} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{1/2} (n - k)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2} (k - n)} \right] <$$

$$\begin{aligned} < \frac{\sigma_0}{n} + \frac{2\sigma_0}{n^{1/2}} \left[\frac{\sqrt{n-1} + 1}{2(n-1)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})^2 (\sqrt{n}-1)}{\sqrt{n}+1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \ln (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \right] < \sigma_0 \frac{4 + 4 \ln 4n}{n} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Полученная оценка при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, т. е., начиная с некоторого номера n_0 , будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < 1, \quad n \geq n_0 \quad (3.15)$$

Следовательно, бесконечная система (3.10) будет квази-вполне регулярной.

Значение n_0 зависит от чисел N_k и в каждом конкретном случае легко может быть найдено.

Так как свободные члены бесконечной системы (3.10) имеют порядок $O(k^{-n/2})$, то путем последовательных приближений нетрудно показать, что неизвестные коэффициенты X_k будут иметь тот же порядок. Поэтому ряд, входящий в первое уравнение (3.3) (перемещение на внешнем контуре), будет повсюду абсолютно сходящимся и после определения X_k легко вычисляется. Поэтому перемещения будем вычислять с помощью формул (1.12) как внутри области, так и на контурах. Второй ряд системы (3.3) (напряжение) абсолютно не сходится, а в точке контура $x = \beta - 0$, $t = t_1$ обращается в бесконечность, вследствие чего для вычисления нормальных напряжений σ_r и σ_z в точках контура малой окрестности края штампа пользоваться формулами (3.3) и (1.11) нецелесообразно. Поэтому необходимо вывести удобные формулы для вычисления нормальных напряжений σ_r и σ_z во всех точках внешнего контура, включая также точки контура в малой окрестности края штампа.

С учетом (3.10) вычислим сумму ряда, входящего в (3.3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos kx &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cos kx \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} X_p + b_k \right) = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} X_p \sum_{k=1}^{\infty} k a_{kp} \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \cos kx \end{aligned} \quad (3.16)$$

где a_{kp} и b_k определяются формулами (3.11).

Принимая, что $f_1(0)$ и $f_2(\varphi_1) < \infty$ и учитывая, что

$$kz_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta = -d[y_k(\cos \theta)], \quad (3.17)$$

$$y_k(-1) = z_k(1) = 0, \quad y_k(1) = 2, \quad z_k(-1) = 2(-1)^{k-1}$$

вместо последней из формул (3.11) будем иметь

$$b_k = -\frac{1}{2} \left\{ [F_1(\beta) - F_2(\beta)] \frac{y_k(\cos \beta)}{k} - \frac{1}{k} \int_0^\beta F_1'(\theta) y_k(\cos \theta) d\theta - \right. \\ \left. - \frac{1}{k} \int_\beta^\pi F_2'(\theta) y_k(\cos \theta) d\theta \right\} + X_0 \frac{y_k(\cos \beta)}{k} \quad (3.18)$$

Учитывая (3.11), (3.18) и формулу

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(\cos \beta) \cos kx = \begin{cases} 2 \cos x / 2 [2(\cos x - \cos \beta)]^{-1/2} & (x < \beta) \\ 0 & (x > \beta) \end{cases} \quad (3.19)$$

из (3.16) получим

$$a^2 e^{i\sigma_r} (t_1, \varphi) = \begin{cases} X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos kx = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos 2k\varphi = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos x}{(\cos x - \cos \beta)^{1/2}} H + \Psi(\varphi) & (0 \leq \varphi < \varphi_0) \\ f_2(\varphi) & (\varphi_0 < \varphi < \varphi_1) \end{cases} \quad (3.20)$$

где коэффициент H имеет значение

$$H = -\frac{1}{2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} p N_p X_p \cos \beta + F_1(\beta) - F_2(\beta) - 2X_0 \right], \\ \beta = \frac{\pi\varphi_0}{\varphi_1}, \quad x = \frac{\pi\varphi}{\varphi_1} \quad (3.21)$$

а ограниченная и непрерывная функция $\Psi(\varphi)$ имеет вид

$$\Psi(\varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} p^2 N_p X_p \sum_{k=1}^{\infty} J_{kp} \cos kx + F_2(\beta) - F_1(\beta) - \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \left[\int_0^\beta \frac{F_1'(\theta) d\theta}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}} + \int_\beta^\pi \frac{F_2'(\theta) d\theta}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}} \right] + X_0 - H \right\} \quad (3.22)$$

где

$$J_{kp} = \int_0^\beta y_k(\cos \theta) y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \theta / 2 d\theta = \\ = \frac{p z_p(\cos \beta) y_k(\cos \beta) - k z_k(\cos \beta) y_p(\cos \beta)}{p^2 - k^2}$$

$$J_{kk} = \frac{1}{2k} \left| 2 + 2P_{k-1}(\cos \beta) P_k(\cos \beta) + P_k^2(\cos \beta) - P_{k-1}^2(\cos \beta) + \right. \\ \left. + 4 \sin^2 \beta \sum_{n=1}^{k-1} \frac{P_n(\cos \beta) P_n'(\cos \beta)}{n+1} \right| \quad (3.23)$$

Нетрудно получить на контуре в непосредственной близости от края штампа формулу для $\sigma_\varphi(t_1, \varphi)$, аналогичную (3.20). Например, для задачи 1, пользуясь (1.11) и (3.3), будем иметь

$$\alpha^2 e^{t_1 \sigma_\varphi}(t_1, \varphi) = X_0 \operatorname{cth} t_1 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \frac{2\alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \cos \alpha_k \varphi = \\ = \alpha^2 e^{t_1 \sigma_r}(t_1, \varphi) + \chi(\varphi) \quad (0 < \varphi < \varphi_1) \quad (3.24)$$

где

$$\chi(\varphi) = (\operatorname{cth} t_1 - 1) X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \frac{\alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \cos \alpha_k \varphi \quad (3.25)$$

Отсюда видно, что на внешнем контуре (при $t = t_1$) $\sigma_\varphi(t_1, \varphi)$ имеют такую же особенность у края штампа, как и $\sigma_r(t_1, \varphi)$.

Значения напряжений σ_r и σ_z внутри области, а также в точках внутреннего контура будем вычислять по формулам (1.11).

В качестве примера рассмотрим плоскую задачу для кругового кольца, когда на внешнем контуре действуют три ($m = 3$) одинаковых симметрично расположенных штампа, а внешний контур вне штампов и внутренний контур свободны от внешних усилий. Принимается, что

$$t_1 = 0.5 \left(\frac{b}{a} \cong 1.65 \right), \quad \alpha_k = 3k, \quad \varphi_0 = 6^\circ \\ \varphi_1 = 60^\circ \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varphi_0} = 9 \right), \quad \varepsilon = 0.25 \quad (3.26)$$

В этом случае имеем

$$f_1(\varphi) = c, \quad f_2(\varphi) = 0, \quad F_1(\vartheta) = 0, \quad F_2(\vartheta) = 0, \quad b_k = X_0 \frac{y_k(\cos \beta)}{k} \quad (3.27)$$

а для вычисления $\sigma_r(t, \varphi)$, $\sigma_z(t, \varphi)$ и $u(t, \varphi)$ получим

$$\alpha^2 e^{t \sigma_r}(t, \varphi) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} 0.5} X_0 + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k X_k}{9k^2 \operatorname{sh}^2 0.5 - \operatorname{sh}^2 1.5 k} \left\{ 3k \operatorname{sh} 0.5 [e^t \operatorname{sh} 3k(0.5 - t) + \right. \\ \left. + 3k \operatorname{ch} 3k(0.5 - t) \operatorname{sh} t] - \operatorname{sh} 1.5 k [e^{-(0.5-t)} \operatorname{sh} 3kt + \right. \\ \left. + 3k \operatorname{ch} 3kt \operatorname{sh}(0.5 - t)] \right\} \cos 3k\varphi$$

$$\begin{aligned}
 a^2 e^t \sigma_r(t, \varphi) &= \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} 0.5} X_0 + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k X_k}{9k^2 \operatorname{sh}^2 0.5 - \operatorname{sh}^2 1.5 k} \left\{ 3k \operatorname{sh} 0.5 [e^t \operatorname{sh} 3k(0.5 - t) - \right. \\
 &- 3k \operatorname{ch} 3k(0.5 - t) \operatorname{sh} t] + \operatorname{sh} 1.5 k [-e^{-(0.5-t)} \operatorname{sh} 3kt + \\
 &\left. + 3k \operatorname{ch} 3kt \operatorname{sh}(0.5 - t)] \right\} \cos 3k\varphi \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{aE}{1.25} u(t, \varphi) &= \frac{\operatorname{ch} t - 0.25 e^t}{\operatorname{sh} 0.5} X_0 - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k X_k}{(9k^2 - 1)(9k^2 \operatorname{sh}^2 0.5 - \operatorname{sh}^2 1.5 k)} \left\{ 3k \operatorname{sh} 0.5 [(9k^2 \operatorname{sh} t + \right. \\
 &+ 0.5 e^t) \operatorname{sh} 3k(0.5 - t) + (\operatorname{ch} t + 0.5 e^t) 3k \operatorname{ch} 3k(0.5 - t)] + \\
 &+ \operatorname{sh} 1.5 k [9k^2 \operatorname{sh}(0.5 - t) - 0.5 e^{-(0.5-t)}] \operatorname{sh} 3kt + \\
 &\left. + [\operatorname{ch}(0.5 - t) + 0.5 e^{-(0.5-t)}] 3k \operatorname{ch} 3kt \right\} \cos 3k\varphi
 \end{aligned}$$

Решалась укороченная система (3.10) из десяти уравнений. Результаты вычисления по формулам (3.28) значений σ_r , σ_φ в точках области за исключением внешнего контура, а также значений u на контурах и внутри области сведены в табл. 1 и 2. Значения σ_r и σ_φ на внешнем контуре, включенные в табл. 1, вычислены по формулам (3.20) и (3.24).

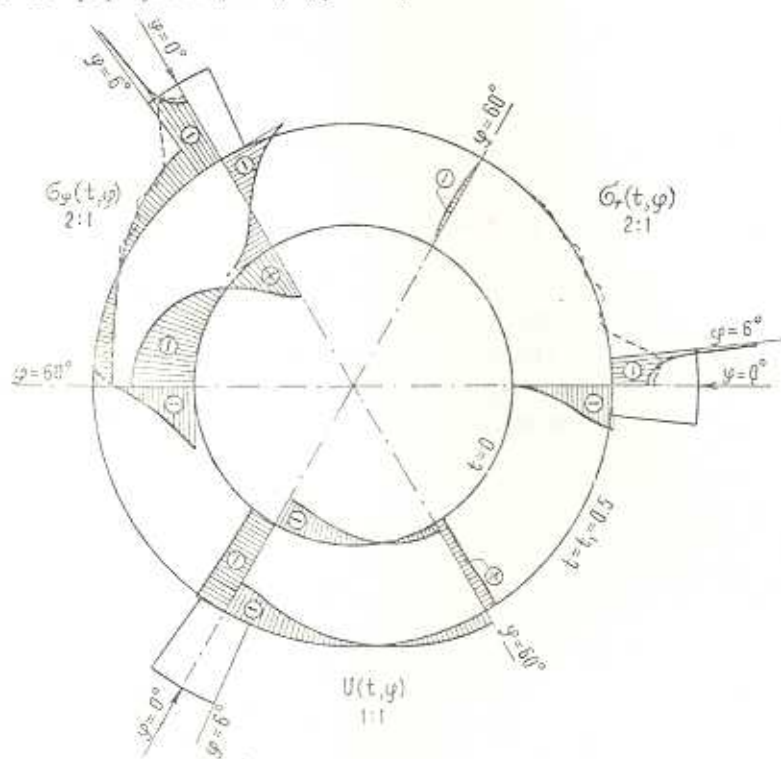
Таблица 1

	$\frac{a}{Ec} \sigma_r(t, \varphi)$	$\frac{1}{c} u(t, \varphi)$	$\frac{a}{Ec} \sigma_r(t, \varphi)$	$\frac{a}{Ec} \sigma_\varphi(t, \varphi)$	$\frac{1}{c} u(t, \varphi)$
$\varphi^0 \backslash t$	$t=0$		$t=t_1=0.5$		
0	0.824	-0.846	-0.459	-0.976	-1.000
1	0.821	-0.845	-0.472	-0.988	-0.998
2	0.812	-0.842	-0.513	-1.026	-0.993
3	0.797	-0.836	-0.589	-1.098	-0.982
4	0.777	-0.829	-0.723	-1.228	-0.967
5	0.751	-0.820	-1.702	-1.530	-0.945
6	0.721	-0.808	$\infty; 0$	$\infty; -0.490$	-0.917
7	0.685	-0.795	0	-0.481	-0.883
8	0.646	-0.780	0	-0.470	-0.844
9	0.603	-0.764	0	-0.458	-0.802
10	0.557	-0.745	0	-0.445	-0.759
15	0.298	-0.634	0	-0.366	-0.584
20	0.029	-0.500	0	-0.270	-0.458
25	-0.217	-0.356	0	-0.167	-0.303
30	-0.427	-0.212	0	-0.065	-0.173
35	-0.602	-0.078	0	0.027	-0.039
40	-0.742	0.040	0	0.107	0.073
45	-0.850	0.138	0	0.171	0.166
50	-0.923	0.210	0	0.217	0.240
55	-0.974	0.255	0	0.246	0.278
60	-0.990	0.270	0	0.255	0.299

Таблица 2

t	$\frac{\alpha}{Ec} \sigma_r(t, \varphi)$		$\frac{\alpha}{Ec} \sigma_\varphi(t, \varphi)$		$\frac{1}{c} u(t, \varphi)$	
	0	60	0	60	0	60
0.1	-0.017	-0.061	0.346	-0.651	-0.864	0.270
0.2	-0.147	-0.070	0.067	-0.391	-0.879	0.293
0.3	-0.332	-0.053	-0.160	-0.172	-0.906	0.304
0.4	-0.536	-0.020	-0.485	0.032	-0.950	0.308

Для наглядности построены графики $\sigma_r(t, \varphi)$, $\sigma_\varphi(t, \varphi)$ и $u(t, \varphi)$, причем пунктирной линией показаны σ_r и σ_φ на внешнем контуре, вычисленные по формулам (3.28) (фиг. 2).



Фиг. 2.

Числовые расчеты показывают, что формулы (3.28) для нормальных напряжений σ_r и σ_φ дают точные результаты в точках внешнего контура вдали от края штампа и внутри области. В малой двусторонней окрестности края штампа эти же формулы практически непригодны. Для получения удовлетворительных результатов для σ_r и σ_φ , вычисляемых по формулам (3.28), следует бесконечную систему (3.10) решать с большим числом неизвестных.

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Վ. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՍՈՐԷ ԽՆԳՐԻ ԼՈՒՄՈՒՄԸ
ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Հոդվածում արվում է շրջանային օղակի հարթ դեֆորմացիայի ինքրի ճշգրիտ լուծումը, երբ եզրագծերից որևէ մեկի վրա ազդում են սիմետրիկ դասավորված m միասնական շտամպեր ($m \geq 2$):

Խնդիրը բերվում է եռանկյունաձևական ֆունկցիաներ պարունակող դուրջ շարք-հավասարումների լուծմանը: Այդ դուրջ հավասարումները բերված են դժային հանրահաշվական անվերջ սխառեմի: Ապացուցվում է, որ այդ անվերջ սխառեմն ընդհանուր դեպքում քվայդր-լուծին սեղուլյար է, իսկ ազատ անդամները՝ ինդեքսը մեծանալիս, ձգտում են զրոյի:

Դիտարկված օրինակներում հանրահաշվական սխառեմը ստացվում է լիովին սեղուլյար: Մասնավոր դեպքում դիտարկված ինդիքսներից ստացվում են լուծումներ շրջանի և շրջանային անցքով հարթ ության համար: Դիտարկված է թվային օրինակ:

A. H. BABLOYAN, V. G. SAHAKIAN

SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM OF THE THEORY
OF ELASTICITY FOR A CIRCULAR RING

S u m m a r y

The paper presents the accurate solution of the problem of a plane deformation of a circular ring in case of the action of „ m “ similar punches symmetrically arranged on one of the boundaries of the ring.

The problem is reduced to the solution of dual trigonometrical series. The latter have been reduced to an infinite system of linear algebraic equations.

It has been proved that for a general case the infinite system is quasi quite-regular, and the free members of the equations tend to zero.

In the cases considered, the above system is quite regular.

In a particular instance, solutions may be obtained for any plane circle and any plane with a circular hole from the considered problems.

An example with numerical values has been presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. ГИИТ, М.—Л., 1951.

3. *Тамато Осаму, Камада Такэси.* Некоторые смешанные граничные задачи для упругих круглых плит. Нихон кикай гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1964, 30, № 217, 1220—1227.
4. *Цумаки Йосихико, Ямада Тэцуёси.* К решению смешанной краевой задачи для бесконечной пластины с круговым отверстием. Нихон кикай гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1965, 31, № 332, 1786—1792.
5. *Саакян В. Г.* Об одной плоской задаче теории упругости для круга со смешанными граничными условиями. Известия АН АрмССР, Механика, т. 19, № 1, 1966.
6. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
7. *Баблюн А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 15, № 1, 1962.
8. *Tranter C. I.* Dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Ass., vol. 4, 49—57, 1959.
9. *Sneddon I. N.* Dual equations in elasticity. IUTAM, Аннотации докладов, М., 1963.
10. *Минков И. М.* О некоторых парных суммарных уравнениях, автореферат дисс., АПИ им. М. И. Калинина, Л., 1964.
11. *Баблюн А. А.* Решение некоторых „парных“ рядов. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 3, 1964, 149—157.
12. *Баблюн А. А.* Решение некоторых парных уравнений, ПММ, 1967.
13. *Srivastav R. P.* Dual Relations involving Trigonometric Series. Proc. Roy. Soc. Edinb. (sec. A), vol. 66, pt. III, 173—184, 1964.
14. *Лебедева Н. Н.* Специальные функции и их приложения. ГИИТА, М., 1953.