

Т. Т. АРАКЕЛЯН

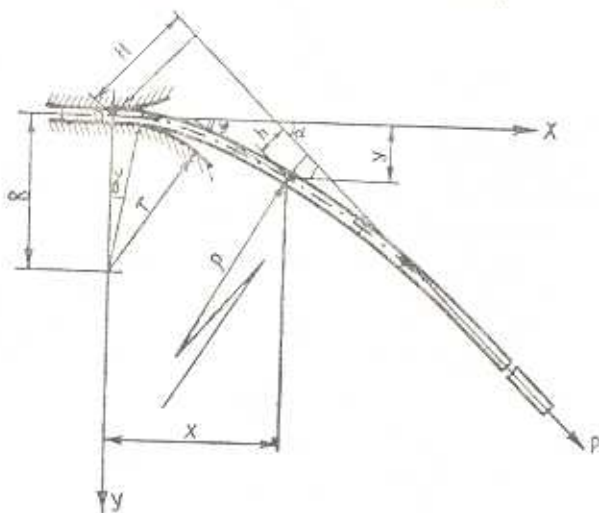
### ИЗГИБ ВОЛОКНА

Е. П. Поповым [1, 2, 3] создан общий эффективный метод решения широкого класса нелинейных задач статики тонкого стержня. Им рассмотрены большие перемещения изгиба гибкого стержня под действием различных нагрузок. Решение нескольких частных задач приводится в работе [4].

В настоящей работе на основе решения задачи поперечного изгиба и растяжения гибкого элемента бесконечной длины дается способ получения приближенных значений элементов изгиба волокна конечной длины, не содержащих, в отличие от результатов других решенных задач, эллиптических интегралов.

Используя указанные выражения элементов изгиба, можно установить количественные характеристики усталостной прочности и гибкости волокна, а также определить моменты инерции некруглых волокон и нить сложной структуры.

1. Уравнение упругой линии волокна. Рассмотрим одиночное волокно с заданным поперечным сечением, один конец которого закреплен в зажимах с закругленными кромками радиуса  $r$  (фиг. 1). На другом бесконечно удаленном конце статически приложена нагрузка  $P$ .



Фиг. 1.

Линия действия силы  $P$  в процессе изгиба остается параллельной своему первоначальному направлению и составляет угол  $\alpha$  с зажимной плоскостью.

Важной особенностью здесь является наличие больших упругих перемещений при малой деформации и работе материала волокна в пределах пропорциональности.

Следует отметить, что минеральные (стекловолокна), некоторые жесткие органические и синтетические волокна (лен, рами, хлопок, саран, фортизан и другие) практически вплоть до разрушения обладают упругой деформацией и линейной связью между напряжением и деформацией [5, 6].

В силу изложенного, ограничивая значение угла  $\alpha$  интервалом  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , устраняем вероятность возникновения нескольких форм равновесия волокна под действием ограниченной нагрузки  $P$ .

Полагая, что на фиг. 1 изображена равновесная форма оси волокна, для величины изгибающего момента будем иметь

$$M = Ph = P(y \cos \alpha - x \sin \alpha + H) \quad (1.1)$$

где  $h$  — плечо внешней силы, а  $H$  — пока неизвестная постоянная.

Расположив координатные оси, как показано на фиг. 1, получим следующие эквивалентные дифференциальные уравнения упругой линии волокна:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{P}{EJ} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} (y \cos \alpha - x \sin \alpha + H) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{P}{EJ} \sin(\alpha - \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha \quad (1.3)$$

Если предположить, что  $R > \rho_{\min}$ ,  $\alpha > \gamma$ , то граничные условия поставленной задачи будут

$$\varphi = \alpha, \quad M = 0 \quad (1.4)$$

$$s = \gamma R, \quad \varphi = \gamma, \quad [x = R \sin \gamma, \quad y = R(1 - \cos \gamma), \quad \rho = R] \quad (1.5)$$

где  $EJ$  — изгибная жесткость волокна,

$\varphi$  — угол поворота сечения волокна,

$s$  — длина дуги упругой линии, измеряемая от начала координат,

$\rho$  — радиус кривизны изогнутой оси волокна,

$\gamma$  — угол обхвата волокном неподвижной цилиндрической поверхности зажима,

$R$  — радиус кривизны волокна на этом участке.

Очевидно, условие (1.4) точно выполняется только в случае бесконечно длинного волокна.

Первым интегралом уравнения (1.3) будет

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{C_1 - 2\lambda^2 \cos(\alpha - \varphi)} = \frac{1}{\rho} \quad (1.6)$$

где  $C_1$  — постоянная интегрирования,  $\lambda^2 = \frac{P}{EJ}$ .

Учитывая (1.4) и (1.6), находим

$$C_1 = 2\lambda^2 \quad (1.7)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = 2\lambda \sin \frac{1}{2} (\alpha - \varphi) = \frac{M}{EJ} \quad (1.8)$$

$$dx = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{C_1 - 2\lambda^2 \cos(\alpha - \varphi)}}, \quad dy = \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{C_1 - 2\lambda^2 \cos(\alpha - \varphi)}} \quad (1.9)$$

При этом для всех действительных значений  $C_1$  в интервале  $0 < C_1 < 2\lambda^2$  из (1.9) получим

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha + C_2 = \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{C_1 - 2\lambda^2 \cos(\alpha - \varphi)} \quad (1.10)$$

Отсюда же, учитывая (1.5) и (1.7), для значений постоянной интегрирования  $C_2$  находим

$$C_2 = R [\cos(\alpha - \gamma) - \cos \alpha] + \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Для значений угла охвата  $\gamma$  из (1.5) и (1.8) имеем

$$\gamma = \alpha - 2 \arcsin \frac{1}{2\lambda R} \quad (1.11)$$

Внеся (1.7) в (1.10) и сопоставляя (1.1) и (1.8), получаем

$$H = C_2$$

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varphi) = \frac{\lambda}{2} (y \cos \alpha - x \sin \alpha + H) = \frac{\lambda}{2} h \quad (1.12)$$

Отсюда, в силу (1.6) и (1.8), для интервала  $\gamma \leq \varphi \leq \alpha$  приходим к важному соотношению

$$\frac{1}{\rho} = \lambda^2 h$$

выражающему геометрическую особенность упругой линии волокна, а именно: величина кривизны в любой точке упругой линии пропорциональна расстоянию этой точки от линии действия внешней силы и монотонно возрастает в интервале от  $R$  до  $\infty$  (фиг. 1). Кроме того, линия действия внешней силы является асимптотой упругой линии волокна бесконечной длины, независимо от способа его закрепления.

Исходя из (1.4), (1.7), (1.9) и (1.12), получим решение нелинейного уравнения (1.2) в следующем виде:

$$y = R(1 - \cos \gamma) + \frac{2}{\lambda} \left\{ \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) + \right. \quad (1.13)$$

$$\left. + \sin \alpha \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{1}{4} (\alpha - \gamma) \operatorname{tg} \frac{1}{4} (1 - \sqrt{1 - u^2}) \right] + \sin \alpha \sqrt{1 - u^2} + 4 \cos \alpha \right\}$$

где

$$u = \frac{\lambda}{2} \left( y \cos \alpha - x \sin \alpha + \frac{1}{2\lambda R^2} + 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)$$

Учитывая (1.4) и (1.5), из (1.8) находим решение нелинейного уравнения (1.3)

$$\varphi = \alpha - 4 \operatorname{arctg} \left[ e^{\lambda(\gamma R - x)} \operatorname{tg} \frac{1}{4} (\alpha - \gamma) \right] \quad (1.14)$$

Это соотношение показывает, что рассматриваемый случай изгиба гибкого элемента эквивалентен переходной форме равновесия по терминологии Е. П. Попова.

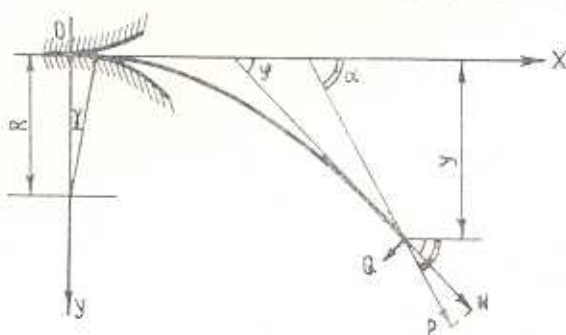
Внося (1.14) в (1.6), получим натуральное уравнение оси волокна

$$\rho = \frac{1}{4\lambda} \left[ \operatorname{tg} \frac{1}{4} (\alpha - \gamma) + e^{-2\lambda(\gamma R - x)} \operatorname{ctg} \frac{1}{4} (\alpha - \gamma) \right] e^{\lambda(\gamma R - x)} \quad (1.15)$$

Выражения нормальной и поперечной сил изгибаемого волокна будут (фиг. 2)

$$N = P \cos (\alpha - \varphi), \quad Q = P \sin (\alpha - \varphi) \quad (1.16)$$

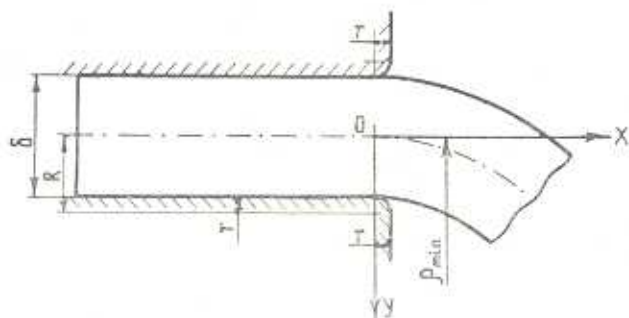
При помощи соотношений (1.12), (1.14), (1.15) и (1.16) все эле-



Фиг. 2.

менты изгиба волокна можно выразить как через координаты упругой линии волокна, так и через длины дуги последнего.

2. Частные случаи. При исследовании механических свойств одиночных волокон их часто закрепляют в зажимах с прямоугольными кромками. Даже в случае прямоугольных кромок зажима их следует считать закругленными некоторым радиусом, ибо во всех случаях



Фиг. 3.

физическое ребро прямого двугранного угла представится некоторой неровной поверхностью в окрестности ребра с некоторым средним радиусом кривизны  $r$  (фиг. 3). При этом, если

$$r + \frac{\delta}{2} = R < \rho_{\min} \quad (2.1)$$

то для опасного сечения изгибаемого волокна

$$\gamma = 0 \quad (2.2)$$

т. е. не имеет места охват (наматывание) волокном закругленной кромки зажима. Для этого случая выражения элементов изгиба через декартовы координаты будут

$$\begin{aligned} M &= 2 \sqrt{PEJ} \sin \frac{\alpha}{2} - P(x \sin \alpha - y \cos \alpha) \\ \varphi &= \alpha - 2 \arcsin \left[ \frac{\lambda}{2} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + \sin \frac{\alpha}{2} \right] \\ y &= \frac{1}{\lambda} \left[ 4 \sin \frac{\alpha}{4} \cos^3 \frac{\alpha}{4} \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} - \sin (\alpha - \arcsin u) - \ln \frac{4}{1 + \sqrt{1 + u^2}} \right] \\ u &= \frac{\lambda}{2} \left( y \cos \alpha - x \sin \alpha + \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\ N &= P \left\{ 1 - 2 \left[ \frac{\lambda}{2} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + \sin \frac{\alpha}{2} \right]^2 \right\} \\ Q &= 2P \left[ \frac{\lambda}{2} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{\alpha}{2} \right] \sqrt{1 - \left[ \frac{\lambda}{2} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + \sin \frac{\alpha}{2} \right]^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Важным случаем изгиба волокна является тот случай, когда внешняя сила (сила тяжести) составляет с начальной прямолинейной осью угол

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

При этом выражения элементов изгиба в зависимости от параметра  $\varphi$ , декартовых координат и дуги  $s$  будут

$$\begin{aligned} M &= 2 \sqrt{PEJ} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), \quad x = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \left[ 1 - \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ y &= \frac{1}{\lambda} \left[ \sqrt{2} + \ln (\sqrt{2} - 1) - 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] \\ N &= P \sin \varphi, \quad Q = P \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{2PEJ} - \frac{P}{\sqrt{2}} x, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} x \right) \\ y &= \frac{1}{\lambda} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ln (\sqrt{2} - 1) - \cos \frac{1}{2\sqrt{2}} (2 - \lambda x) - \right. \\ &\quad \left. - \ln \frac{2 - \lambda x}{2 \sqrt{2} + \sqrt{8 - (2 - \lambda x)^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$N = P[1 - (\sqrt{2} - \lambda x)^2], \quad Q = P(\sqrt{2} - \lambda x) \sqrt{1 - \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \lambda x)^2} \quad (2.5)$$

$$M = \frac{4(\sqrt{2} - 1)\lambda EJ e^{-\lambda s}}{1 + (3 - 2\sqrt{2})e^{-2\lambda s}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - 4 \operatorname{arctg} [(\sqrt{2} - 1)e^{-\lambda s}]$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \left[ 1 - \frac{10 - 7\sqrt{2} + 4(3 - 2\sqrt{2})e^{\lambda s} + (2 - \sqrt{2})e^{2\lambda s}}{2(2 - \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2} + e^{2\lambda s})} \right]$$

$$y = s - \frac{(2 - \sqrt{2})(e^{2\lambda s} - 1)}{\lambda(3 - 2\sqrt{2} + e^{2\lambda s})} \quad (2.6)$$

$$N = 8P \left\{ \frac{1}{[1 + (3 - 2\sqrt{2})e^{-2\lambda s}]^2} - \frac{1}{1 + (3 - 2\sqrt{2})e^{-2\lambda s}} - \frac{1}{8} \right\}$$

$$Q = \frac{8P[2 + (3 - \sqrt{2})e^{-\lambda s}](\sqrt{2} - 1)e^{-\lambda s}}{[1 + (3 - 2\sqrt{2})e^{-2\lambda s}]^2}$$

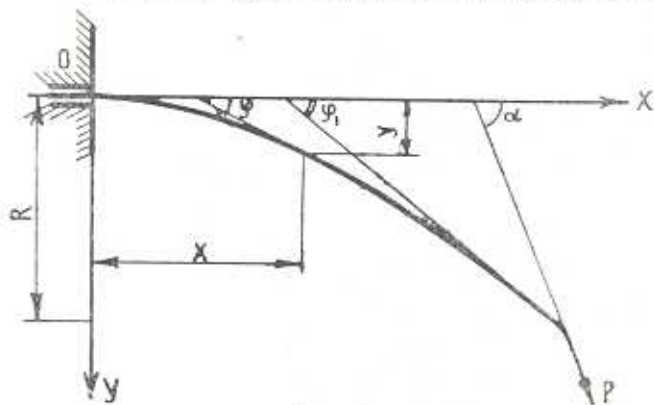
Следует отметить, что абсцисса конца бесконечно длинного гибкого элемента, разность его длины и ординаты конца, согласно (2.5) и (2.6), получают конечные значения

$$x_{s \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2EJ}{P}}, \quad (s - y)_{s \rightarrow \infty} = (2 - \sqrt{2}) \sqrt{\frac{EJ}{P}}$$

При этом

$$x_{s \rightarrow \infty} : (s - y)_{s \rightarrow \infty} = 1 + \sqrt{2}$$

3. Изгиб волокна конечной длины. Рассмотрим одиночное волокно длины  $l$ , один конец которого консольно заделан в зажимах с прямоугольными кромками (фиг. 4). На другом конце статически при-



Фиг. 4.

ложена нагрузка  $P$ , в процессе изгиба сохраняющая свое первоначальное направление.

При этом очевидно  $\gamma = 0$ , а граничными условиями задачи будут

$$s = l, \quad \varphi = \varphi_1, \quad M = 0 \quad (3.1)$$

$$s = 0, \quad \varphi = 0, \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.2)$$

где  $\varphi_1$  — угол наклона касательной конечной точки упругой линии волокна к оси  $x$  (фиг. 4).

Дифференциальным уравнением упругой линии волокна опять будет уравнение (1.3). Очевидно, при небольшой длине гибкого элемента  $\varphi_1 \neq \alpha$ . Из (3.1) и (1.6) имеем

$$C_1 = 2\lambda^2 \cos(\alpha - \varphi_1)$$

Внося теперь найденное значение  $C_1$  в (1.6), получим

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{2\lambda \sqrt{\cos(\alpha - \varphi_1) - \cos(\alpha - \varphi)}}} \quad (3.3)$$

Введя в (3.3) новую переменную

$$\psi = \arcsin \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha - \varphi)}{1 + \cos(\alpha - \varphi_1)}}$$

и проинтегрировав в интервалах

$$s = 0, \quad \psi = \psi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$s = l, \quad \psi = \psi_0 = \arcsin \left[ \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \varphi_1)} \right]$$

найдем

$$kl = \int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = K(k) - F(k, \psi_0)$$

где  $k = \cos \frac{1}{2}(\alpha - \varphi_1)$ ,  $k < 1$

$K(k)$  и  $F(k, \psi_0)$  — полный и неполный эллиптические интегралы первого рода.

Из системы полученных трансцендентных уравнений,

$$kl = K(k) - F(k, \psi_0), \quad k = \cos \frac{1}{2}(\alpha - \varphi_1), \quad \psi_0 = \arcsin \left( \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{k} \right) \quad (3.4)$$

принципиально можно определить  $k$ ,  $\psi_0$  и  $\varphi_1$ . Тогда для величины изгибающего момента будем иметь

$$M = \sqrt{2PEJ} [\cos(\alpha - \varphi_1) - \cos(\alpha - \varphi)], \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_1$$

Из соотношения (3.3) находим

$$s = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{k} F(k, \psi)$$

Остальные элементы изгиба также выражаются через эллиптические интегралы, которые мы здесь не приводим.

В частном случае, когда  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , система уравнений (3.4) принимает вид

$$\lambda l = K(k) - F(k, \varphi_0), \quad k = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right), \quad \varphi_0 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}k}\right) \quad (3.5)$$

Такой результат приводится в работе [2].

Для установления влияния длины гибкого элемента и величины внешней нагрузки на значение угла  $\varphi_1$ , вычисляется значение этого угла для различных длин изгибаемого элемента и силы  $P$  при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . В качестве примера рассматривается алюмоборосиликатное стекловолокно [7] с диаметром  $\delta = 0.01$  мм, пределом прочности  $\sigma_0 = 170 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$  и модулем упругости  $E = 7200 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$ .

Если за величину внешних сил принимать некоторую часть разрушающей нагрузки

$$P_1 = P_0 : 500 = 0.269 \cdot 10^{-5} \text{ кг}, \quad P_2 = P_0 : 50 = 2.694 \cdot 10^{-5} \text{ кг}, \\ P_3 = P_0 : 5 = 26.940 \cdot 10^{-5} \text{ кг},$$

то параметр  $\lambda$  соответственно получит значения

$$\lambda_1 = 0.881 \frac{1}{\text{мм}}, \quad \lambda_2 = 2.786 \frac{1}{\text{мм}}, \quad \lambda_3 = 8.810 \frac{1}{\text{мм}}.$$

Исходя из системы трансцендентных уравнений (3.5), при помощи таблиц эллиптических интегралов подбором определяются численные значения  $\varphi_1$  при различных значениях  $l$  и  $P$ .

Результаты проделанных расчетов представлены в таблице.

Из таблицы следует, что с возрастанием как длины гибкого элемента, так и величины внешней силы значение угла  $\varphi_1$  быстро приближается к величине  $\alpha$ .

Одновременно известно, что гибкие элементы—это стержни, размеры поперечных сечений которых весьма малы по сравнению с длиной. Следовательно, в силу вышеизложенного, в случае больших перемещений гибких элементов практически будет иметь место равенство

$$\varphi_1 \approx \alpha \quad (3.6)$$

При этом, если допустить погрешность

$$\frac{\alpha - \varphi_1}{\alpha} 100 \ll 5\%$$

то соответствующее значение безразмерного коэффициента будет ограничиваться числом

$$\lambda l \geq 3.744 \quad (3.7)$$



Таблица

$$\delta = 0,01 \text{ м.м.}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$l$	$\delta l$	$\varphi_1^0$	$\frac{\alpha - \varphi_1}{\alpha} 100\%$
$P_1 - P_0 = 530$			
200%	1.762	58° 23' 40"	35.12
400%	3.524	84° 21' 40"	6.27
500%	4.405	87° 40' 48"	2.58
800%	7.048	89° 50' 02"	0.18
1000%	8.810	89° 59' 12"	0.02
$P_2 - P_0 = 50$			
50%	1.393	47° 28' 20"	47.25
100%	2.786	78° 32' 28"	12.73
200%	5.572	89° 13' 49"	0.83
$P_2 - P_0 = 5$			
50%	4.405	87° 40' 48"	2.58
100%	8.810	89° 59' 12"	0.02

Следовательно, если приближенное равенство (3.6) считать практическим условием больших упругих деформаций гибкого элемента, то неравенство (3.7) или, что то же самое, неравенство

$$l \sqrt{\frac{P}{EJ}} > 3,744$$

служат предельной количественной характеристикой сильного упругого изгиба для рассматриваемого случая плоского изгиба гибкого элемента.

Отсюда приходим к важному заключению, что в случае сильного упругого изгиба не только элементарного волокна, но и других гибких элементов, при практических инженерных расчетах можно пользоваться полученными аналитическими соотношениями элементов изгиба (1.13), (1.14), (1.15), (1.16), а также (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6), явно зависящими от параметров гибкого элемента и внешней силы.

Թ. Տ. ԱՐԱԿԵԼՅԱՆ

## ՄԱՆՐԱԹԵԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

## Ա մ ֆ ո ֆ ու լ մ

Հստակած է էլեմենտար մանրաթելի՝ որպես մի ծայրով ամրակցված ձկուն էլեմենտի, ծոման ոչ գծային խնդիրը:

Խնդրի լուծման բնթացքում հայտնաբերված են մանրաթելի առաձգական գծի երկրաչափական առանձնահատկություններ:

Ստացված ծոման բոլոր էլեմենտների անալիտիկ բանաձևերը արտահայտված են դեկարտյան կոորդինատներով, մանրաթելի առաձգական գծի աղիքով և այլ պարամետրերով՝ նրա մի ծայրի ցանկացած տրայի ամրակցման դեպքում:

Ոչ միայն մանրաթելի, այլ նաև ուրիշ ձկուն էլեմենտների պրակտիկ ինժեներական հաշվարկներ կատարելիս, երբ նրանք ենթարկվում են ուժեղ առաձգական ծոման, կարելի է օգտվել հիշյալ բանաձևերից: Ընդ որում, վերջիններս բացահայտ կերպով կախված են՝ ինչպես ձկուն էլեմենտի պարամետրերից, այնպես էլ արտաքին ուժի մեծությունից:

T. T. АРАКЕЛЯН

## BENDING OF FIBRE

## S u m m a r y

In this paper the non-linear problem of the bending of an elementary long fibre with one clamped end is considered.

The obtained expressions for the magnitudes in question depend on the geometrical parameters of the fibre, the elastic properties of the material and the value of applied external force.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Попов Е. П. Расчет гибких брусьев. Инж. сб., т. 2, вып. I, М., 1943.
2. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих деталей. Изд. АКВВИА, 1947.
3. Попова Е. П. Нелинейные задачи статки тонких стержней. ОГИЗ, Гостехиздат, М., 1948.
4. Jukchi Go, Akira Shinohare and Zenzo Kodatra. Measurements of the Flexura Rigidity of Fiber and Jern. J. of the Society of Textile and Cellulose Industries, Japan, vol. 16. № 3, March 1960.
5. Кукин Г. Н., Соловьев А. Н. Текстильное материаловедение, ч. II. Изд. „Легкая индустрия“, М., 1964.
6. Кесвелл Р. Текстильные волокна, пряжа и ткани. Ростехиздат, М., 1960.
7. Зах А. Ф. Физико-химические свойства стекловолокна. Ростехиздат, М., 1962.