

П. И. СЕМЕНОВ

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ НА КРУЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ УДЛИНЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Приводятся результаты опытов на кручение призматических стержней, изготовленных из древесно-слоистого пластика ДСП-Б. Были испытаны стержни прямоугольного, трапециoidalного, ромбического сечений, а также стержни с сечениями в виде кругового сегмента. Опытные углы закручивания сопоставлялись с теоретическими, полученными нами в результате решения задачи методом последовательных приближений.

1. Рассмотрим стержень постоянного сечения, нагруженный двумя крутящими парами по концам. Материал стержня будем считать однородным с анизотропией частного вида: в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, перпендикулярная к оси стержня. Как известно [1], задача о кручении такого неортоотропного стержня произвольного сечения сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{2\theta}{a_{33}} - \frac{a_{44} \partial^2 \varphi}{a_{33} \partial x^2} + \frac{2a_{35}}{a_{33}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (1.1)$$

где a_{ij} — упругие постоянные материала, θ — угол закручивания единицы длины стержня, $\varphi(x, y)$ — функция напряжений, которая на контуре сечения равна нулю.

Касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} и крутящий момент M_t определяются по формулам

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad M_t = 2 \iint \varphi \, dx dy \quad (1.2)$$

Решение этой задачи для некоторых нетонкостенных сечений дано В. Фойгтом, А. Ш. Локшиным [библиография — в работе [1]], а также Р. С. Минасяном [2] и другими. Для удлиненного профиля эта задача решалась В. Д. Ванториним, А. Р. Янпольским, В. С. Саркисяном [3, 4]. Были применены различные приближенные и точные методы [Ритца, малого параметра и др.]

Мы применили метод последовательных приближений, сущность которого заключается в следующем.

Пусть сечение скручиваемого стержня ограничено двумя кривыми $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ и представляет собой узкую вытянутую вдоль оси x область (фиг. 1). В первом приближении будем считать, что в правой части уравнения (1.1) функция напряжений не зависит от координаты x . Тогда второе и третье слагаемые пропадут, уравнение упростится и

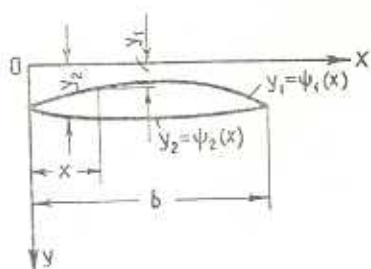
мы получим следующие результаты (аргумент при ψ_i опускаем, штрихом отмечаем производные по x):

$$\varphi^{(1)}(x, y) = \frac{\theta^{(1)}}{a_{55}} [-\psi_1\psi_2 + (\psi_1 + \psi_2)y - y^2] \quad (1.3)$$

$$\tau_{zx}^{(1)} = \frac{M_t}{J_k^{(1)}} (\psi_1 + \psi_2 - 2y), \quad \tau_{xy}^{(1)} = \frac{M_t}{J_k^{(1)}} [(\psi_1\psi_2)' - (\psi_1 + \psi_2)'y] \quad (1.4)$$

$$\theta^{(1)} = \frac{M_t a_{55}}{J_k^{(1)}} = \frac{M_t}{G_{zx} J_k^{(1)}} \quad (1.5)$$

$$J_k^{(1)} = \frac{1}{3} \int_0^b (\psi_2 - \psi_1)^3 dx \quad (1.6)$$



Фиг. 1.

где $G_{zx} = \frac{1}{a_{55}}$ — модуль сдвига в плоскости zx , b — ширина сечения, $J_k^{(1)}$ — момент инерции при кручении.

Значение функции напряжений $\varphi^{(1)}(x, y)$ в первом приближении подставляем в правую часть уравнения (1.1) и, после интегрирования с использованием условий на контуре, находим во втором приближении:

$$\varphi^{(2)}(x, y) = \frac{\theta^{(2)}}{a_{55}} \left\{ [-\psi_1\psi_2 + (\psi_1 + \psi_2)y - y^2] \left[1 - \frac{a_{44}}{2a_{55}} (\psi_1\psi_2)'' - \frac{a_{45}}{a_{55}} (\psi_1 + \psi_2)' \right] + \frac{a_{44}}{6a_{55}} (\psi_1 + \psi_2)'' [-\psi_1\psi_2 (\psi_1 + \psi_2) + (\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \psi_2^2)y - y^3] \right\} \quad (1.7)$$

$$\theta^{(2)} = \frac{M_t}{G_{zx} J_k^{(2)}} \quad (1.8)$$

$$J_k^{(2)} = \frac{1}{3} \int_0^b (\psi_2 - \psi_1)^3 \left\{ 1 - \frac{a_{45}}{a_{55}} (\psi_1 + \psi_2)' - \frac{a_{44}}{4a_{55}} [2(\psi_1\psi_2)'' - (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1 + \psi_2)'] \right\} dx \quad (1.9)$$

Формулы касательных напряжений можно получить по (1.2). Аналогично можно выполнить решение в третьем и в последующих приближениях. Однако, в общем виде здесь получаются довольно громоздкие выражения.

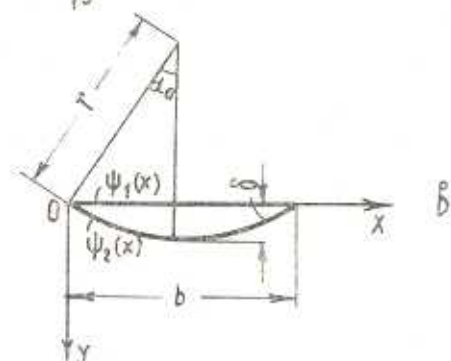
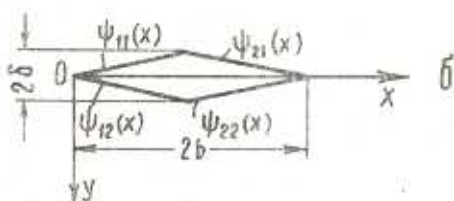
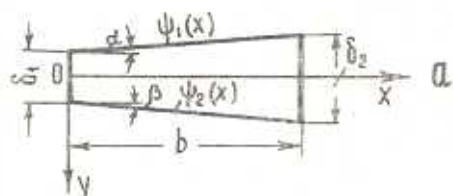
Изложенная методика была приложена к конкретным примерам (фиг. 2). Результаты оказались следующие.

а) *Трапеция*. Для этой задачи получено решение, точно удовлетворяющее уравнению (1.1) и граничным условиям на длинных (боковых) сторонах. Это приближенное решение сводится к следующим формулам:

$$\psi_1(x) = -a - mx, \quad \psi_2(x) = a + nx \quad (1.10)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{\theta A}{a_{55}} [(a + mx)(a + nx) + (n - m)xy - y^2] \quad (1.11)$$

$$J_k = \frac{Ab}{12} (\delta_1 + \delta_2) (\delta_1^2 + \delta_2^2) \quad (1.12)$$



Фиг. 2.

$$\gamma = \frac{a_{44}}{a_{55}} mn - \frac{a_{45}}{a_{55}} (n - m) \quad (1.13)$$

$$A = \frac{1}{1 - \gamma} \quad (\gamma^2 < 1) \quad (1.14)$$

$$\tau_{zx} = \frac{M_t}{J_k} [(n - m)x - 2y] \quad (1.15)$$

$$\tau_{zy} = -\frac{M_t}{J_k} [a(m + n) + 2mnx + (n - m)y]$$

где δ_1 , δ_2 , b , α , β — параметры сечения трапеции (фиг. 2-а)

$$m = \operatorname{tg} \alpha, \quad n = \operatorname{tg} \beta, \quad a = 0.5 \delta_1;$$

б) Ромб. В этом случае найдено

$$\psi_{11}(x) = -\frac{\delta}{b} x, \quad \psi_{21}(x) = \frac{\delta}{b} x - 2\delta$$

$$\psi_{12}(x) = \frac{\delta}{b} x, \quad \psi_{22}(x) = -\left(\frac{\delta}{b} x - 2\delta\right) \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= \frac{\theta B}{a_{55}} \left[\left(\frac{\delta}{b} x \right)^2 - y^2 \right], \quad (0 \leq x \leq b) \\ \varphi_2(x, y) &= \frac{\theta B}{a_{55}} \left[\left(\frac{\delta}{b} x - 2\delta \right)^2 - y^2 \right], \quad (b \leq x \leq 2b)\end{aligned}\quad (1.17)$$

$$\tau_{zx, \max} = \frac{2M_t \delta}{J_k}, \quad \tau_{zy, \max} = \frac{2M_t \delta^2}{J_k b} \quad (1.18)$$

$$B = \frac{1}{1 - \frac{a_{44} \delta^2}{a_{55} b^2}}, \quad \left[\left(\frac{a_{44} \delta^2}{a_{55} b^2} \right)^2 < 1 \right] \quad (1.19)$$

$$J_k = \frac{4}{3} B b \delta^3 \quad (1.20)$$

где $2b$ и 2δ — ширина и толщина сечения (фиг. 2-б);

в) *Круговой сегмент*. Уравнения контура имеют вид

$$\psi_1(x) = 0, \quad \psi_2(x) = \delta - r + \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2} - x \right)^2} \quad (1.21)$$

В первом приближении получаем

$$\psi^{(1)}(x, y) = \frac{\theta y}{a_{55}} \left[\delta - r + \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2} - x \right)^2} - y \right] \quad (1.22)$$

$$\tau_{zx, \max}^{(1)} = \frac{M_t \delta}{J_k^{(1)}} \quad (1.23)$$

$$J_k^{(1)} = \frac{2_0 r^2}{4} (5r^2 - b^2) - \frac{b(r - \delta)}{24} (15r^2 - 0.5 b^2) \quad (1.24)$$

Во втором приближении

$$J_k^{(2)} = J_k^{(1)} + \Delta J_k \quad (1.25)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta J_k &= \frac{a_{44}}{12a_{55}} \left\{ -b(r - \delta)^3 - 4r(r - \delta)^2 \ln \frac{r - 0.5b}{r + 0.5b} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{2} b r^2 (r - \delta) - \sigma_0 r^2 [r^2 + 12(r - \delta)^2] \right\} \quad (1.26)\end{aligned}$$

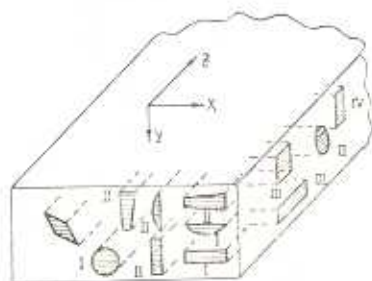
2. Изложенная методика проверялась не только путем сравнения с другими методами, но и с результатами испытания на кручение образцов из пластика ДСП-Б. Этот материал изготавливается способом прессования древесного шпона на синтетических смолах, причем через несколько слоев шпона одного направления укладывается один ряд шпона перпендикулярного направления. Отсюда следует, что этот пластик довольно близко подходит к ортотропному материалу. Испытанию были подвергнуты трапециевидные, ромбические, круглые и прямоугольные образцы, а также образцы в виде кругового сегмента. Образцы изготавливались из плиты ДСП-Б толщиной 50 мм путем механической обработки. Схема выемки образцов приведена на фиг. 3. Ось z направлена вдоль подавляющего большинства волокон.

Испытания производились на специально изготовленной установке с непосредственным нагружением (гирями). Образцы до разрушения не доводились. Угол закручивания определялся при помощи зеркального прибора Мартенса.

Предварительно были найдены модули сдвига этого материала на других образцах по методике, описанной в работе [5]. Опытные углы закручивания сравнивались с теоретическими, найденными по предыдущим формулам.

Результаты испытаний даны ниже.

В табл. 1 приведены данные для симметричной трапеции ($m=l$). Поэтому второе слагаемое в (1.13) пропадает и формулы будут такими же, как для ортотропной трапеции. При данных размерах образцов, как показывают расчеты, можно пользоваться формулами первого приближения, т. е. принимать $A=1$.



Фиг. 3.

Таблица 1

Трапециевидные образцы ($M_t = 10 \text{ кгс.м}$)

№№ образцов	Размеры сечения, мм			A	$J_k, \text{ см}^4$	Угол закручивания $\theta \cdot 10^4, \text{ рад/см}$	
	b	b_1	b_2			$\theta_{\text{теор}}$	$\theta_{\text{оп}}$
I-1	39.6	3.525	6.412	1.0017	0.1759	22.56	20.34
I-2	39.5	3.22	6.21	0.0018	0.1474	26.93	25.76
I-3	38.9	3.21	6.19	1.0019	0.1484	26.75	26.85
II-1	39.2	3.74	6.46	1.0009	0.1862	27.15	26.91
II-2	40.0	3.56	6.38	1.0010	0.1769	28.56	28.54

Таблица 2

Ромбические образцы

№№ образца	Размеры сечения, мм		Упругие постоянные $a \cdot 10^4, \text{ см}^2/\text{кг}$		B	$J_k, \text{ см}^4$	Угол закручивания $\theta \cdot 10^4, \text{ рад/см}$	
	2b	2c	a_{44}	a_{55}			$\theta_{\text{теор}}$	$\theta_{\text{оп}}$
1	42.2	8.64	0.4468	0.4569	1.043	0.2365	13.52	12.20
2	42.2	9.04	0.4478	0.4548	1.047	0.2721	11.70	10.75
3	42.4	8.64	0.4424	0.4604	1.042	0.2363	13.64	12.35
4	40.8	10.16	0.4485	0.4556	1.065	0.3797	13.20	13.35
5	40.8	10.10	0.4469	0.4564	1.064	0.3728	13.47	14.12

Таблица 3

Образцы в виде кругового сегмента ($M_t = 15 \text{ кгсм}$)

№№ образ-ца	Размеры сечения, мм		$J_k^{(1)}$, см ⁴	ΔJ_k , см ⁴	$J_k^{(2)}$, см ⁴	Угол закручивания $\theta \cdot 10^4$, рад/см		
	b	δ				$\theta_{\text{теор}}^{(1)}$	$\theta_{\text{теор}}^{(2)}$	$\theta_{\text{оп}}$
I—1	39,4	8,42	0,3801	-0,0363	0,3438	15,66	17,31	18,65
2	38,9	7,89	0,3066	-0,0259	0,2807	19,41	21,21	21,80
3	38,9	8,00	0,3200	-0,0278	0,2922	18,60	20,37	22,31
4	39,3	8,19	0,3484	-0,0317	0,3167	17,08	18,80	18,50
5	39,3	8,31	0,3625	-0,0331	0,3294	16,42	18,06	18,00
II—1	39,5	8,18	0,3464	-0,0191	0,3273	21,87	23,14	26,18
2	39,8	8,33	0,3700	-0,0208	0,3492	20,48	21,69	24,10
3	39,3	8,20	0,3484	-0,0196	0,3288	21,74	23,04	25,48
4	40,0	8,55	0,4037	-0,0242	0,3795	18,76	19,96	22,47
5	39,3	8,25	0,3557	-0,0208	0,3349	21,30	22,62	25,40

Таблица 4

Круглые и прямоугольные ($M_t = 10 \text{ кгсм}$) образцы

Тип сечения	Размеры сечения, мм	Угол закручивания $\theta \cdot 10^4$, рад/см		$\theta_{\text{оп}}$
		$\theta_{\text{теор}}$	$\theta_{\text{оп}}$	
Круглые, I	$d = 11,96$	22,45	22,22	2,0
" " II	$d = 14,22$	15,24	15,60	2,3
прямоугольный, III	$13,13 \times 12,33$	16,90	15,64	8,3
плоский, I	$35,1 \times 7,06$	11,25	11,35	1,0
" " II	$35,0 \times 7,17$	13,26	13,10	1,0
" " III	$34,1 \times 7,32$	11,06	12,75	13,3
" " IV	$34,7 \times 8,71$	12,12	13,65	11,2

В табл. 2 помещены результаты для образцов ромбического сечения. Эти результаты для первых трех образцов соответствуют приращению крутящего момента $M_t = 7 \text{ кгсм}$, для остальных — $M_t = 11 \text{ кгсм}$. В данном случае диагонали ромба не совпадали с главными направлениями упругости материала. Поэтому вместо главных упругих постоянных a_{44} и a_{55} нужно было вычислить новые постоянные a_{44} и a_{55} по формулам поворота осей [1, стр. 41]. На торцах каждого образца были лобзиком пропилены тонкие углубления по слоям пластика и этими торцами были сделаны на бумаге отпечатки, по которым определялись углы между осями.

В табл. 3 приведены данные для двух типов образцов с сечением в виде кругового сегмента. Теоретические углы закручивания вычислялись в двух приближениях, причем второе приближение оказалось ближе к опытным величинам, чем первое.

Кроме этого, были испытаны круглые и прямоугольные образцы, теоретическое решение для которых дано Сен-Венаном [1]; результаты

Таблица 5

Разница между опытными и теоретическими углами закручивания

Разница между $\theta_{теор}$ и $\theta_{оп}$	Количество образцов и %, где имела место указанная разница				
	Трапеция	Ромб	Сегмент		Круглые и прямоугольные сечения
			1 приб.	2 приб.	
до 5%	80	40	0	20	57
5—10	0	0	20	50	14
10—15	20	60	30	30	29
>15	0	0	50	0	0

для этого случая (по одному образцу каждого типа) приводятся в табл. 4.

Сравнение теоретических и опытных результатов дано в табл. 5.

3. Выводы. 1. Изложенный метод последовательных приближений не является сложным и может быть использован в расчетной практике. 2. Теоретические формулы удовлетворительно согласуются с данными опытов.

Киевский инженерно-строительный институт

Поступила 26 I 1967

Պ. Ի. ՍԵՄՅՈՆՈՎ

ԵՐԿԱՐԱՅՎԱԾ ՀԱՏՈՒՅԹՈՎ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՁՈՂԵՐԻ ՈՂՈՐՄԱՆ ՓՈՐՁԱՐԿՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՐԳՅՈՒՆՔՆԵՐ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հողվածում բերվում են ԳՄՊ—Բ փայտաշերտավոր պլաստիկից պատրաստված սրիզմաձև ձողերի ուղրման փորձարկման արդյունքները: Փորձարկվել են՝ սեղանաձև, շեղանկյունաձև և շրջանային սեղմենտի հատույթներով ձողերը: Այդ ձողերի համար բերվում են տեսական լուծումները, որոնք ստացված են հեղինակի կողմից հաջորդական մասավորությունների եղանակով: Փորձարկվել են նաև ուղղանկյունաձև ու շրջանաձև հատույթներով ձողերը, որոնց համար տեսական լուծումները հայտնի էին:

Ուղրման անկյան տեսական և փորձնական արժեքների համընկնումը բավարար է:

P. I. SEMIONOV

SOME RESULTS OF TESTS ON TORSION OF ANISOTROPIC BARS OF OBLONGED CROSS-SECTION

S u m m a r y

The results of torsion tests for prismatic bars made of wood laminate ДСП-Б are given. Bars of trapezoidal, rhombic and of circular-segment cross-section have been tested. For these bars the results of

the theoretical solution obtained by the author using the method of successive approximations are presented. Bars of rectangular and circular cross-section, for which the theoretical solution was previously known, have also been tested.

The agreement between theoretically and experimentally obtained angles of twist is found to be satisfactory.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. *Минасян Р. С.* О кручении и изгибе анизотропных призматических стержней с сечением в виде параллелограмма. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XI, № 3, 1958.
3. *Саркисян В. С.* Кручение анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XII, № 2, 1959.
4. *Саркисян В. С.* Кручение анизотропных призматических стержней в виде удлиненного авиационного профиля. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XIV, № 2, 1961.
5. *Семенов П. И.* Определение модулей сдвига ортотропных материалов из опытов на кручение. Механика полимеров, № 1, 1966.