ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 4, 1967 Механика

В. Ц. ГНУНИ

О ЧАСТОТАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ С ПЕРЕМЕННЫМ ВО ВРЕМЕНИ МОДУЛЕМ УПРУГОСТИ

Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины h, отнесенную к декартовым координатам x, y, z так, что срединная плоскость недеформируемой пластинки совпадает с плоскостью xy.

Пусть модуль упругости прямоугольной в плане $(a \times b)$ шарнирно опертой пластинки изменяется во времени по закону [1]

$$E = E_0 + E_1(t) \tag{1}$$

где E_0 — модуль упругости материала пластинки при $t = 0$.

Принимая гипотезу о недеформируемых нормалях [2] по отношению к тонкой пластинке, получим следующее уравнение свободных колебаний пластинки:

$$\frac{[E_0 + E_1(t)]\,h^2}{12(1-\nu^2)}\,\Delta^2 w + \rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа, w — прогиб, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластинки.

Полагая

$$w = f(t)\sin\lambda_n x \sin\mu_m y \qquad \left(\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad \mu_m = \frac{m\pi}{b}\right) \tag{3}$$

тождественно удовлетворим условиям шарнирного опирания краев пластинки.

Здесь $f(t)$ — искомая функция, n, m — числа полуволн по направлениям x, y.

Подставляя (3) в (2), получим

$$F(t, f) \equiv f'' + \omega_*^2(t) f = 0, \qquad \left(\frac{df}{dt} = f'\right) \tag{4}$$

где

$$\omega_*^2(t) = \omega_0^2 + \alpha(t), \qquad \omega_0^2 = \frac{E_0 h^2}{12(1-\nu^2)\rho}\left(\lambda_n^2 + \mu_m^2\right)^2 \tag{5}$$

квазистатическая и начальная частоты собственных колебаний пластинки,

$$\alpha(t) = \frac{E_1(t)\,h^2}{12(1-\nu^2)\rho}\left(\lambda_n^2 + \mu_n^2\right)^2 \tag{6}$$

Предположим, что в течение одного (j-го) периода пластинка колеблется по закону

$$f = C(t_j)\cos\omega(t_j)(t-t_j) \tag{7}$$

где $t_j = \sum_{k=1}^{j}\frac{2\pi}{\omega(t_k)}$ — время прохождения j-го периода колебаний.

Предполагая также

$$\left|\frac{E'}{E}\right|\frac{2\pi}{\omega} \ll 1$$

что справедливо для многих практических задач, представим квазистатическую частоту собственных колебаний пластинки в виде

$$\omega_*^2(t) = \omega_*^2(t_j) + \alpha'(t)\big|_{t=t_j}(t-t_j) \tag{8}$$

Применяя относительно уравнения (4) процедуру Бубнова—Галеркина, получим [3]

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} F[t,\ C(t_j)\cos\omega(t_j)(t-t_j)]\cos\omega(t_j)(t-t_j)\,dt = 0 \tag{9}$$

Учитывая (8), из (9) получим

$$\omega^3(t_j) - \omega_*^2(t_j)\,\omega(t_j) + \pi\alpha'(t)\big|_{t=t_j} = 0 \tag{10}$$

Уравнение (10) справедливо только для определенных моментов времени. Однако, учитывая, что время существенного изменения модуля упругости достаточно велико по сравнению с периодом колебаний, можно приближенно принять, что уравнение (10) справедливо для любого момента времени в рассматриваемом интервале. Тогда уравнение (10) перепишем в виде

$$\omega^3(t) - \omega_*^2(t)\,\omega(t) + \pi\alpha'(t) = 0 \tag{11}$$

Последний член уравнения (11) характеризует влияние динамики изменения модуля упругости во времени. Если $\alpha'(t) > 0$, то динамика изменения модуля упругости приводит к уменьшению частоты собственных колебаний пластинки. Если же $\alpha'(t) < 0$, то имеет место обратная картина — динамика изменения модуля упругости приводит к увеличению частоты собственных колебаний пластинки.

В качестве примера рассмотрим квадратную пластинку ($a = b = \pi\ м$) при $m = n = 1$ и

$$E_i = E_0\left(1 + (-1)^i\frac{t}{2t_*}\right), \quad 0 \leq t \leq t_* \tag{12}$$

Здесь при $i=1$ модуль упругости материала пластинки уменьшается, а при $i=2$ — увеличивается.

Пусть $E_0 = 2\cdot 10^{10}\,\frac{кг}{м^2}$, $\nu = 0.408$, $\rho = 10^3\,\frac{кг\,сек^2}{м^4}$, $h = 10^{-2}\,м$

По этим данным из формул (5), (6) получим

$$\omega_0^2 = 800\,\frac{1}{сек^2} \tag{13}$$

$$\omega_{*i}^2(t) = 800\left(1 + (-1)^i\,\frac{t}{2t_*}\right)\frac{1}{сек^2} \tag{14}$$

а уравнение (11) запишется в виде

$$\omega_i^3(t) - 800\left(1 + (-1)^i\left(\frac{t}{2t_*}\right)\right)\omega_i(t) + (-1)^i\,400\,\pi\,\frac{1}{t_*} = 0 \tag{15}$$

В табл. 1 приведены значения начальной, квазистатической и динамической частот собственных колебаний пластинки при $t_* = 1$ *сек.*

Таблица 1

	$i=1$			$i=2$		
t *сек*	ω_0^2	ω_*^2	ω^2	ω_0^2	ω_*^2	ω^2
0.5	800	600	649.2	800	1000	959.1
1	800	400	458.8	800	1200	1162

Рассматривая табл. 1, замечаем, что при $i = 1$ квазистатическая частота собственных колебаний оболочки существенно уменьшается во времени, а учет влияния динамики изменения модуля упругости приводит к некоторому увеличению частоты. В случае же $i = 2$ наблюдается обратная картина — квазистатическая частота увеличивается во времени, а учет влияния динамики изменения модуля упругости приводит к некоторому уменьшению частоты.

В заключение отметим, что в работах [3, 4] время прохождения j-го периода колебаний и границы одного периода колебаний приближенно были определены без учета изменения частоты колебаний во времени, т. е. из квазистатических соображений. Здесь это предположение не делается, однако конечный приближенный результат совпадает с результатом приближенного интегрирования идентичного уравнения в работе [4].

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступила 19 I 1967

Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

ԺԱՄԱՆԱԿԻ ԸՆԹԱՑՔՈՒՄ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄՈԴՈՒԼ ՈՒՆԵՑՈՂ ՍԱԼԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ստացված է խորանարդ հավասարման տեսքով մոտավոր առնչություն՝ ուղղանկյուն, իզոտրոպ, հոդակապորեն ամրացված սալի սեփական տատանումների հաճախականության որոշման համար։

Ցույց է տրված ժամանակի ընթացքում առաձգականության մոդուլի փոփոխման ազդեցությունը սեփական տատանումների փոփոխական հաճախականության վրա։

V. Ts. GNUNI

ON THE FREQUENCIES OF THE PLATE PROPER VIBRATION WITH THE ELASTICITY MODULUS VARYING IN TIME

S u m m a r y

A cubic equation to determine a proper vibration of frequencies of the rectangular isotropic plate is approximately obtained.

The influence of variability of elastic modulus in time on the frequency of proper vibrations is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Об одной задаче колебания ортотропной пластинки, находящейся в поле действия высоких температур. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1963.
2. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М.-Л., 1948.
3. *Амбарцумян С. А., Гнуни В. Ц.* Параметрические колебания гибкой пластинки в поле действия высоких температур. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 1964.
4. *Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц.* Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. Докл. АН АрмССР, т. 41, № 4, 1965.