ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 3, 1967 Механика

М. В. БЕЛУБЕКЯН

К ЗАДАЧЕ ОБ АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ СЛЕДЕ ЗА ПЛАСТИНКОЙ

Рассматривается задача о движении вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое, сошедшем с продольно обтекаемой плоской пластинки и образовавшем непосредственно за ним аэродинамический след. Ранее, Голдстейном и Толмином получено решение указанной задачи в области, не превышающей половины длины пластинки за задней кромкой и в области на большом удалении от пластинки [1]. В настоящей работе делается попытка получения приближенного решения, пригодного во всей области течения жидкости.

1. Пусть пластинка длины L обтекается потоком несжимаемой вязкой жидкости, имеющим на бесконечности скорость U_∞. Направим ось x по пластинке, ось y — перпендикулярно к ней, а начало координат поместим в передней кромке пластинки. Уравнения пограничного слоя для данной задачи имеют вид [1]

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

Граничными условиями будут

$$\left.\begin{array}{l} u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad 0 < x < L \\ u \to U_\infty \quad \text{при} \quad y \to \infty \quad \text{и} \quad 0 < x < \infty \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad x > L \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

Будем искать решение задачи в приближении Озеена. В этом случае задача сводится к решению линейного уравнения [2]

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\nu}{U_\infty}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

с граничными условиями (1.2).

Рассмотрим отдельно две задачи, связанные с решением уравнения (1.3), но с различными граничными условиями:

а) полубесконечная пластинка продольно обтекается потоком жидкости со скоростью U_∞;

б) жидкость покоится при $x \geq L$. Вдоль оси x при $x > L$ имеется распределение скорости $u_m(x)$.

Очевидно, что решение исследуемой задачи в приближении Озеена в области $x > L$ будет суммой решений указанных задач, если возможно найти $u_m(x)$ так, чтобы удовлетворить последнему из граничных условий (1.2). Решения задач а) и б) имеют вид [2, 3]

$$u_{1a}(x,\ y) = U_\infty \operatorname{Erf}(\eta_1) \tag{1.4}$$

$$u_{1б}(x,\ y) = -\int_L^x u_m(\xi)\frac{\partial u_q}{\partial \xi}\,d\xi \tag{1.5}$$

где

$$\begin{gathered}\operatorname{Erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\xi^2}d\xi, \qquad \eta_1 = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \\ \eta_2 = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu(x-\xi)}}, \qquad u_q = 1 - \operatorname{Erf}(\eta_2)\end{gathered} \tag{1.6}$$

Используя (1.6) и условие $u_m(L) = 0$, с помощью интегрирования по частям выражение (1.5) представим в более удобной форме

$$u_{1б}(x,\ y) = \int_L^x u_m'(\xi)\left[1 - \operatorname{Erf}(\eta_2)\right]d\xi \tag{1.7}$$

Тогда искомое решение будет иметь вид

$$u_1(x,\ y) = U_\infty \operatorname{Erf}(\eta_1) + \int_L^x u_m'(\xi)\left[1 - \operatorname{Erf}(\eta_2)\right]d\xi \tag{1.8}$$

Согласно последнему граничному условию (1.2) из выражения (1.8) получаем интегральное уравнение для определения неизвестной функции $u_m(x)$

$$\int_L^x \frac{u_m'(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\,d\xi = \frac{U_\infty}{\sqrt{x}} \tag{1.9}$$

решением которого будет

$$\frac{u_m(x)}{U_\infty} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{2L}{x} - 1\right) \tag{1.10}$$

2. Известно, что решение в первом приближении Озеена дает лишь качественное описание явления. Зададимся целью решить поставленную задачу по методу Озеена во втором приближении. Для этого необходимо решить уравнение [2]

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\nu}{U_\infty}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \tag{2.1}$$

с соответствующими граничными условиями (1.2).

Использование приема, описанного в предыдущем пункте (разбиение на две задачи а) и б)), дает для скорости на оси x ту же формулу (1.10), в то время как $u_2(x, y)$ определяется из следующего выражения:

$$u_2(x, y) = U_\infty \left[\mathrm{Erf}(\eta_1) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta_1 \exp(-\eta_1^2) \right] +$$

$$+ \int\limits_L^x u'_m(\xi) \left[1 - \mathrm{Erf}(\eta_2) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta_2 \exp(-\eta_2^2) \right] d\xi \tag{2.2}$$

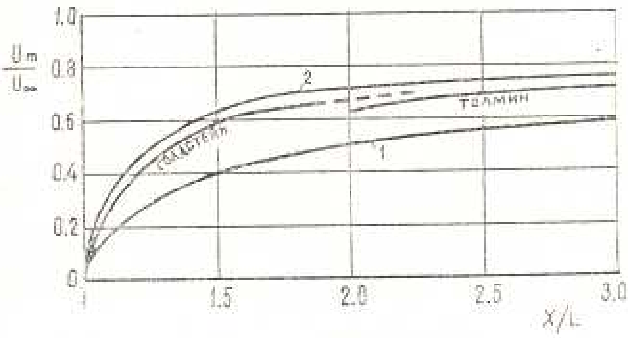
Укажем на другой способ приближенного решения поставленной задачи. Уравнение (1.1) решается точно для каждой из задач а) и б) в отдельности, а затем искомое решение представляется в виде суммы решений этих задач. И в этом случае $u_m(x)$ определяется по формуле (1.10), а для $u(x, y)$ находим

$$u(x, y) = U_\infty \varphi'(2\eta_1) + \int\limits_L^x u'_m(\xi) [1 - \varphi'(2\eta_2)] d\xi \tag{2.3}$$

где функция φ является решением задачи Блазиуса [1].

Отметим, что приближение в методе Озеена связано с заменой точных уравнений некоторым линейным уравнением. Приближение же в последнем случае обусловлено тем, что наложением двух видов течения мы желаем получить решение нелинейной задачи.

3. На фиг. 1 приводится графическая зависимость u_m/U_∞ от x/L согласно формуле (1.10) (кривая 1). Там же приводятся кривые Голдстейна и Толмина, заимствованные из монографии Л. Г. Лойцянского [1].



Фиг. 1.

Сравнение кривой 1 с кривыми Голдстейна и Толмина показывает, что формула (1.10) для распределения скорости по оси x дает качественно верную, но недостаточно точную картину. Можно уточнить формулу (1.10) для $u_m(x)$ следующим выражением:

$$\frac{u_m(x)}{U_\infty} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{2L}{x} - 1 \right) \right]^{c} \tag{3.1}$$

Кривая 2 на фиг. 1 соответствует распределению скорости по оси x согласно выражению (3.1) для $\alpha = 1/2$. Из рисунка видно, что кривая 2 с достаточно хорошей точностью совпадает с кривыми Голдстейна и Толмина.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 VI 1965

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՍԱԼԻ ԱԵՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՀԵՏՔԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է սահմանային շերտում անսեղմելի մածուցիկ հեղուկի շարժման խնդիրը, որը անջատված է երկրաչափական շրջհոսվող սալից և առաջացնում է աերոդինամիկական հետք: Սահմանային շերտի հավասարումները լուծվում են հաջորդական մոտավորությունների եղանակով: Որպես առաջին մոտավորություն ընդունվում է Օզեենի լուծումը:

Ստացված է պարզ բանաձև սալի հարթության մեջ գտնվող առանցքի վրա արագության բաշխման համար:

Գրաֆիկի վրա տրվում է ստացված լուծման համեմատությունը Գոլդստեյնի և Տոլմինի հայտնի լուծումների հետ:

M. V. BELUBEKIAN

ON THE PROBLEM OF THE AERODYNAMIC TRAIL BEHIND THE PLATE

Summary

This paper is dedicated to the study of the boundary layer in steady, incompressible flow past a finite plate.

The formula for velocity" behind the plate, obtained by Oseen's method, is compared with the results of Goldstein and Tollmien.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, М., 1962.
2. *Лойцянский Л. Г.* Аэродинамика пограничного слоя. Гостехтеориздат, М.—Л., 1941.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, том II. Гостехтеориздат, М., 1954.