ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 3, 1967 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ ОДНОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УСЕЧЕННО-КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

В рамках безмоментной теории оболочек [1] рассматривается задача о квазистатическом равновесии усеченно-конической замкнутой оболочки вращения при одном режиме сложного нагружения. После выяснения вопроса о разгрузке и повторном нагружении, на основании теории течения [2] дается точное решение задачи для определенного промежутка времени. Приведен численный пример.

1. Исходные уравнения и соотношения

Рассмотрим усеченно-коническую замкнутую оболочку вращения постоянной толщины h. Положение какого-либо параллельного круга срединной поверхности оболочки будем определять длиной отрезка по образующей s, отсчитываемой от некоторого параллельного круга $s_0 = 0$.

Пусть рассматриваемая оболочка свободна от поверхностных нагрузок ($X = Y = Z = 0$), один край ее ($s_0 = 0$) защемлен, а на другом ($s_1 = l$) действует растягивающее вдоль образующих равномерно-распределенное напряжение q, линейно возрастающее со временем. Будем считать, что напряжение q растет от нуля до некоторого значения, при котором в оболочке существует область упруго-пластических деформаций, после чего защемляется загруженный край ($s_1 = l$) и начинает действовать равномерное внутреннее давление p, опять линейно возрастающее со временем. При этом будем принимать, что растягивающее напряжение q и внутреннее давление p настолько медленно изменяются со временем, что влиянием инерционных членов можно пренебречь.

Для краткости задачу о квазистатическом равновесии рассматриваемой оболочки до приложения внутреннего давления p назовем задачей упруго-пластического растяжения, а после его приложения — задачей с внутренним давлением.

Будем исходить из безмоментной теории оболочек [1], при этом принимая за физические соотношения уравнения теории течения упрочняющего материала [2].

В случае двухосного напряженного состояния эти уравнения имеют вид:

при нагружении ($dT > 0$)

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(d\sigma_1 - \nu d\sigma_2) + \frac{1}{3}F(T)(2\sigma_1 - \sigma_2)\,dT$$
$$d\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(d\sigma_2 - \nu d\sigma_1) + \frac{1}{3}F(T)(2\sigma_2 - \sigma_1)\,dT \tag{1.1}$$

при разгрузке и нейтральных изменениях напряженного состояния ($dT \leqslant 0$)

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(d\sigma_1 - \nu d\sigma_2)$$
$$d\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(d\sigma_2 - \nu d\sigma_1) \tag{1.2}$$

Здесь $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$ и $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ — приращения компонент деформации и напряжения вдоль образующих и кольцевых окружностей срединной поверхности оболочки, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, T — интенсивность касательных напряжений

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \tag{1.3}$$

Для простоты ограничимся случаем линейного упрочнения материала

$$F(T) = F_0 T \tag{1.4}$$

(F_0 — постоянная, определяемая из опытов).

Из геометрических соотношений, в случае защемления края $s = 0$, для перемещения вдоль образующих u и прогиба оболочки w имеем [1]

$$u = \int_0^s \varepsilon_1 ds, \qquad w = \frac{r}{\cos\vartheta}\varepsilon_2 - u\,\mathrm{tg}\,\vartheta \tag{1.5}$$

Здесь ϑ — угол между образующей конуса и ее осью, $r = r_0 - s\sin\vartheta$ — расстояние точек срединной поверхности до оси оболочки.

Напряжения по образующим σ_1 и кольцевым окружностям σ_2 определяются из интегралов статических уравнений безмоментной теории оболочек по формулам [1]

$$\sigma_1 = -\frac{1}{rh\cos\vartheta}\left[\int_0^s r(X\cos\vartheta + Z\sin\vartheta)\,ds - C\right]$$
$$\sigma_2 = \frac{r}{h\cos\vartheta}Z \tag{1.6}$$

Так как внешние воздействия на оболочку в нашем случае изменяются со временем, то фигурирующая в формуле (1.6) неизвестная величина интегрирования C будет функцией времени.

2. Задача упруго-пластического растяжения оболочки

Условия задачи в данном случае таковы:

$$X = Y = Z = 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad \sigma_1(l, t) = q_0 t, \quad q_0 = \mathrm{const}, \quad 0 < t < t_1 \tag{2.1}$$

С учетом (2.1) из (1.6) для напряжений получим

$$\sigma_1(s, t) = \frac{C(t)}{hr\cos\vartheta}, \quad \sigma_2(s, t) = 0 \tag{2.2}$$

где

$$C(t) = q_0 h r_1 t \cos\vartheta, \quad (r_1 = r(l)) \tag{2.3}$$

Следовательно,

$$\sigma_1(s, t) = q_0 \frac{r_1}{r(s)} t, \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}} q_0 \frac{r_1}{r(s)} t \tag{2.4}$$

Так как интенсивность касательных напряжений T — монотонно возрастающая функция от s, то область упруго-пластических деформаций начнется с конца оболочки $s_1 = l$ и с течением времени распространится в сторону другого конца $s_0 = 0$.

Граница упругой и упруго-пластической областей $s_n(t)$ в произвольный момент времени t определится из условия

$$T(s_n, t) = T_n \tag{2.5}$$

(T_n — значение интенсивности касательных напряжений, соответствующее пределу упругости материала) и имеет вид

$$s_n(t) = \frac{1}{\sin\vartheta}\left(r_0 - \frac{r_1 q_0}{\sqrt{3}\, T_n} t\right) \tag{2.6}$$

Момент же времени $t_n(s)$, при котором произвольное кольцевое сечение s окажется границей упругой и упруго-пластической областей, согласно (2.6) будет

$$t_n(s) = \frac{\sqrt{3}\, T_n}{r_1 q_0}(r_0 - s\sin\vartheta) \tag{2.7}$$

Чтобы оболочка в момент времени t_1, когда прекращается рост растягивающего напряжения q, *частично* испытывала упруго-пластические деформации, необходимо выполнение неравенства

$$0 < s_n(t_1) < l \tag{2.8}$$

или, что одно и то же

$$\frac{\sqrt{3}\, T_n}{q_0} = t_n(l) < t_1 < t_n(0) = \frac{\sqrt{3}\, r_0 T_n}{q_0 r_1} \tag{2.9}$$

Очевидно, что часть оболочки $0 \leqslant s \leqslant s_n(t_1)$ деформируется упруго сначала до конца, т. е. при $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Произвольное же сечение s

остальной части оболочки $s_n(t_1) \leqslant s \leqslant l$ деформируется упруго в промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant t_n(s)$, после чего оно испытывает упруго-пластические деформации.

Исходя из вышеизложенного, с учетом (1.1), (1.2), (1.4) и (2.4), для деформации вдоль образующих ε_1 можно записать

$$\varepsilon_1(s, t) = \frac{q_0 r_1}{Er(s)} t, \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant s \leqslant s_n(t) \\ (0 \leqslant t \leqslant t_n(s)) \end{matrix} \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_1(s, t) = \frac{q_0 r_1}{Er} t - \frac{2}{3\sqrt{3}} F_0 T_n^3 + \frac{2F_0}{27}\left(\frac{r_1 q_0 t}{r}\right)^3$$
$$s_n(t) \leqslant s \leqslant l \qquad (t_n(s) \leqslant t \leqslant t_1) \tag{2.11}$$

Внеся значения деформации ε_1 из (2.10) и (2.11) в первое соотношение (1.5), после интегрирования в соответствующих пределах для перемещения вдоль образующих u получим

$$u(s, t) = \frac{q_0 r_1 t}{E \sin\vartheta} \ln\frac{r_0}{r(s)}, \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant s \leqslant s_n(t) \\ (0 \leqslant t \leqslant t_n(s)) \end{matrix} \tag{2.12}$$

$$u(s, t) = \frac{q_0 r_1 t}{E \sin\vartheta} \ln\frac{r_0}{r} + \frac{F_0 r_1 q_0 t}{27 r^2 \sin\vartheta}\left(r_1^2 q_0^2 t^2 - 3r^2 T_n^2\right) -$$
$$- \frac{2F_0 T_n^3}{3\sqrt{3}}\left[s - \frac{1}{\sin\vartheta}\left(r_0 - \frac{r_1 q_0}{\sqrt{3}\, T_n} t\right)\right] \tag{2.13}$$
$$s_n(t) \leqslant s \leqslant l, \qquad (t_n(s) \leqslant t \leqslant t_1)$$

Аналогичным образом определяется и прогиб оболочки w

$$w(s, t) = \frac{q_0 r_1}{E\cos\vartheta}\left(\ln\frac{r_0}{r(s)} - \nu\right) t, \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant s \leqslant s_n(t) \\ (0 \leqslant t \leqslant t_n(s)) \end{matrix} \tag{2.14}$$

$$w(s, t) = \frac{r}{\cos\vartheta}\left[\frac{F_0 T_n^3}{3\sqrt{3}} - \frac{\nu q_0 r_1}{Er} t - \frac{F_0}{27}\left(\frac{r_1 q_0 t}{r}\right)^3\right] -$$
$$+ \frac{1}{\cos\vartheta}\left[\frac{q_0 r_1 t}{E} \ln\frac{r_0}{r} + \frac{F_0 r_1 q_0 t}{27 r^2}\left(r_1^2 q_0^2 t^2 - 3r^2 T_n^2\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{2F_0 T_n^3}{3\sqrt{3}}\left(s\sin\vartheta - r_0 - \frac{r_1 q_0 t}{\sqrt{3}\, T_n}\right)\right] \tag{2.15}$$
$$s_n(t) \leqslant s \leqslant l, \qquad (t_n(s) \leqslant t \leqslant t_1)$$

3. Задача с внутренним давлением

Пусть в момент времени t_1 прекращается рост растягивающего напряжения $q(t)$, защемляется край оболочки $s_1 = l$ и начинает действовать внутреннее давление p, линейно возрастающее со временем

$$p(t) = p_0(t - t_1), \qquad p_0 = \text{const}, \qquad t \geqslant t_1 \tag{3.1}$$

Для данной задачи оболочка предварительно напряжена, причем в одной ее части $0 \leq s \leq s_n(t_1)$ реализовано упругое (2.4), (2.10), (2.12), (2.14), а в остальной части $s_n(t_1) \leq s \leq l$ — упруго-пластическое (2.4), (2.11), (2.13), (2.15) напряженно-деформированные состояния. Задача о квазистатическом равновесии такой оболочки для $t > t_1$ является статически *неопределимой*.

В данном случае ($X = Y = 0$, $Z = p_0(t - t_1)$) из (1.6) для напряжений σ_1 и σ_2 получим

$$\sigma_1 = -\frac{p_0(t-t_1)(r_0^2 - r^2)}{2rh\cos\theta} + \frac{C(t)}{rh\cos\theta}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_0(t-t_1)}{h\cos\theta}\, r, \quad (t \geq t_1) \tag{3.2}$$

Неизвестная функция интегрирования $C(t)$ должна определяться из условия постоянства во времени значения перемещения вдоль образующих u на краю оболочки $s_1 = l$. С учетом (2.13) это условие имеет вид

$$u(l, t) = u[C(t)] - \frac{q_0 r_1 t_1}{E\sin\theta}\ln\frac{r_0}{r_1} + \frac{F_0 r_1 q_0 t_1}{27\sin\theta}(q_0^2 t_1^2 - 3T_n^2) -$$

$$-\frac{2F_0 T_n^3}{3\sqrt{3}}\left[l - \frac{1}{\sin\theta}\left(r_0 - \frac{r_1 q_0}{\sqrt{3}\,T_n} t_1\right)\right] = u_0 = \text{const}, \quad (t > t_1) \tag{3.3}$$

Однако, для нахождения выражения перемещения u через неизвестную функцию $C(t)$ нужно определить области дальнейшего нагружения и разгрузки, появляющиеся вследствие приложения нового воздействия на оболочку (защемление края $s_1 = l$ и появление внутреннего давления p), что предварительно сделать невозможно. В этом и заключается вся трудность решения поставленной задачи.

Допустим, что после приложения внутреннего давления p во всей оболочке в течение некоторого промежутка времени $\Delta t_* = t_* - t_1$ происходит процесс разгрузки или нейтральных изменений напряженного состояния, т. е.

$$dT \leq 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad (t_1 \leq t \leq t_*) \tag{3.4}$$

(Вопрос о действительности этого предположения будет рассматриваться несколько ниже).

В силу (3.4) приращения деформаций выразятся через напряжения и их приращения по формулам (1.2).

Учитывая (3.2), для приращения деформации вдоль образующих $d\varepsilon_1$ из (1.2) получим

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{2Ehr\cos\theta}\left\{2\frac{dC}{dt} + p_0[r_0^2 - (1-2\nu)r^2]\right\}dt \tag{3.5}$$

$$(0 \leq s \leq l)$$

Для выполнения условия (3.3) (условия постоянства перемещения u на краю оболочки $s_1 = l$) необходимо, чтобы

$$\int_0^l \left(\int_{s_0(t_1)}^{s_0(t)} d\varepsilon_1\right) ds = \frac{1}{2Eh\cos\vartheta}\int_0^l \frac{1}{r}\int_{t_1}^{t}\left\{2\frac{dC}{dt} - p_0\left[r_0^2-(1-2\nu)\,r^2\right]\right\} dt\,ds = 0 \qquad (3.6)$$

$$(t > t_1)$$

Имея в виду то обстоятельство, что условие (3.6) должно удовлетворяться при любом $t > t_1$, для неизвестной функции интегрирования $C(t)$ с учетом (3.5) и (2.3) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dC}{dt} - \frac{p_0 r_0^2}{2} + \frac{p_0(1-2\nu)(r_0^2-r_1^2)}{4\ln\frac{r_0}{r_1}} = 0 \qquad (t > t_1) \qquad (3.7)$$

с начальным условием

$$C(t_1) = q_0 h r_1 t_1 \cos\vartheta \qquad (3.8)$$

Следовательно,

$$C(t) = q_0 h r_1 t_1 \cos\vartheta + p_0\left[\frac{r_0^2}{2} - \frac{(1-2\nu)(r_0^2-r_1^2)}{4\ln\frac{r_0}{r_1}}\right](t-t_1) \qquad (3.9)$$

$$(t > t_1)$$

Нахождением неизвестной функции интегрирования (3.9) фактически завершается решение задачи с внутренним давлением в предположении (3.4).

С помощью (3.2), (3.9), (1.2), (2.12)—(2.15) для напряжений и перемещений оболочки получим

$$\sigma_1(s, t) = \frac{q_0 r_1 t_1}{r} + \frac{p_0(t-t_1)}{4rh\cos\vartheta\ln\frac{r_0}{r_1}}\left[2r^2\ln\frac{r_0}{r_1} - (1-2\nu)(r_0^2-r_1^2)\right]$$

$$\sigma_2(s, t) = \frac{p_0(t-t_1)}{h\cos\vartheta}\, r \qquad (0 \leqslant s \leqslant l) \qquad (3.10)$$

$$u(s, t) = \frac{q_0 r_1 t_1}{E\sin\vartheta}\ln\frac{r_0}{r} + \frac{p_0(1-2\nu)(t-t_1)}{2Eh\sin2\vartheta\ln\frac{r_0}{r_1}}\left[(r_0^2-r^2)\ln\frac{r_0}{r_1} - \right.$$

$$\left. - (r_0^2-r_1^2)\ln\frac{r_0}{r_1}\right] \qquad (0 \leqslant s \leqslant s_0(t_1))$$

$$u(s, t) = \frac{q_0 r_1 t_1}{E\sin\vartheta}\ln\frac{r_0}{r} + \frac{F_0 r_1 q_0 t_1}{27 r^2\sin\vartheta}(r_1^2 q_0^2 t_1^2 - 3r^2 T_n^2) -$$

$$- \frac{2F_0 T_n^3}{3\sqrt{3}}\left[s - \frac{1}{\sin\vartheta}\left(r_0 - \frac{r_1 q_0 t_1}{\sqrt{3}\, T_n}\right)\right] +$$

$$+\frac{p_0(1-2\nu)(t-t_1)}{2Eh\sin 2\vartheta\ln\frac{r_0}{r_1}}\left[(r_0^2-r^2)\ln\frac{r_0}{r_1}-(r_0^2-r_1^2)\ln\frac{r_0}{r}\right] \tag{3.11}$$

$$(s_n(t_1)\leqslant s\leqslant l)$$

$$w(s,t)=\frac{q_0r_1}{E\cos\vartheta}\left(\ln\frac{r_0}{r}-\nu\right)t_1+\frac{p_0(t-t_1)}{4Eh\cos^2\vartheta\ln\frac{r_0}{r_1}}\Big\{[3r^2+$$

$$+(1-2\nu)r_0^2]\ln\frac{r_0}{r_1}+(1-2\nu)\left(\nu-\ln\frac{r_0}{r}\right)(r_0^2-r_1^2)\Big\}$$

$$(0\leqslant s\leqslant s_n(t_1))$$

$$w(s,t)=\frac{r}{\cos\vartheta}\left[\frac{F_0T_n^3}{3\sqrt{3}}-\frac{\nu q_0r_1t_1}{Er}-\frac{F_0}{27}\left(\frac{r_1q_0t_1}{r}\right)^3\right]+$$

$$+\frac{1}{\cos\vartheta}\left[\frac{q_0r_1t_1}{E}\ln\frac{r_0}{r}+\frac{F_0r_1q_0t_1}{27r^2}(r_1^2q_0^2t_1^2-3r^2T_n^2)-\right. \tag{3.12}$$

$$\left.-\frac{2F_0T_n^3}{3\sqrt{3}}\left(s\sin\vartheta-r_0+\frac{r_1q_0t_1}{\sqrt{3}T_n}\right)\right]+\frac{p_0(t-t_1)}{4Eh\cos^2\vartheta\ln\frac{r_0}{r_1}}\Big\{[3r^2+$$

$$+(1-2\nu)r_0^2]\ln\frac{r_0}{r_1}+(1-2\nu)\left(\nu-\ln\frac{r_0}{r}\right)(r_0^2-r_1^2)\Big\}$$

$$(s_n(t_1)\leqslant s\leqslant l)$$

Покажем, что после приложения внутреннего давления p на самом деле существует некоторый промежуток времени $\Delta t_* = t_* - t_1$, в течение которого во всей оболочке происходит процесс разгрузки или нейтральных изменений напряженного состояния.

Условие отсутствия нагружения, с учетом (1.3) и (3.2), примет вид

$$\left[p_0^2(r_0^4+3r^4)-2p_0r_0^2\frac{dC}{dt}\right](t-t_1)+4C\frac{dC}{dt}-2p_0r_0^2C\leqslant 0 \tag{3.13}$$

Из этого условия с помощью (3.9) получим

$$\Delta t=t-t_1\leqslant\frac{4q_0hr_1t_1(1-2\nu)(r_0^2-r_1^2)\cos\vartheta\ln\frac{r_0}{r_1}}{p_0\left[12r^4\left(\ln\frac{r_0}{r_1}\right)^2+(1-2\nu)^2(r_0^2-r_1^2)^2\right]} \tag{3.14}$$

Как нетрудно заметить, свое наименьшее значение Δt принимает для края оболочки $s=0$ (при $r=r_0$). Поэтому из (3.14) для продолжительности процесса разгрузки или нейтральных изменений напряженного состояния всей оболочки Δt_* получим

$$\Delta t_* = \frac{4q_0 h r_1 t_1 (1-2\nu)(r_0^2 - r_1^2)\cos\vartheta \ln\dfrac{r_0}{r_1}}{p_0\left[12 r_0^4\left(\ln\dfrac{r_0}{r_1}\right)^2 + (1-2\nu)^2 (r_0^2 - r_1^2)^2\right]} \tag{3.15}$$

Если материал оболочки сжимаем в упругой стадии деформирования ($\nu < 0.5$), то $\Delta t_* > 0$, т. е. после приложения внутреннего давления p во всей оболочке *может* происходить процесс разгрузки или нейтральных изменений напряженного состояния, что *невозможно* ($\Delta t_* = 0$) при несжимаемости материала.

После истечения промежутка времени Δt_* в дальнейшем возникает область повторного нагружения оболочки. На основании (3.14) она начнется с одного конца $s = 0$ и с течением времени (с возрастанием давления $p(t)$) распространится в сторону другого конца оболочки $s = l$. Повторное нагружение до некоторого определенного уровня напряженного состояния является упругим. При этом для части $0 \leqslant s < s_n(t_1)$, где оболочка до этого деформировалась только упруго, повторное нагружение будет упругим не только до прежнего уровня напряженного состояния $T(s, t_1) < T_n$, но и дальше, до предела упругости материала T_n. В остальной же части, где оболочка при первоначальном нагружении ($0 \leqslant t \leqslant t_1$) испытывала упруго-пластические деформации, процесс повторного нагружения будет упругим до прежнего уровня напряженного состояния $T(s, t_1) \geqslant T_n$. Следовательно, для всей оболочки целиком повторное нагружение будет упругим до того момента времени t', при котором где-нибудь в оболочке впервые удовлетворяется одно из следующих двух условий:

$$T(s, t) = T_n \qquad 0 \leqslant s \leqslant s_n(t_1) \tag{3.16}$$

$$T(s, t) = T(s, t_1) \geqslant T_n \qquad s_n(t_1) \leqslant s \leqslant l \tag{3.17}$$

С учетом (1.3), (3.2) и (3.9) из (3.16) относительно промежутка времени $\Delta t_1 = t' - t_1$, в течение которого повторное нагружение для части оболочки $0 \leqslant s \leqslant s_n(t_1)$ будет упругим, получим следующее квадратное уравнение:

$$p_0^2\left[(1-2\nu)^2 (r_0^2 - r_1^2)^2 + 12(r_0 - s_*\sin\vartheta)^4\left(\ln\frac{r_0}{r_1}\right)^2\right](\Delta t_1)^2 -$$

$$-8p_0 q_0 (1-2\nu) h r_1 t_1 (r_0^2 - r_1^2)\cos\vartheta \ln\frac{r_0}{r_1}\Delta t_1 +$$

$$+16h^2\cos^2\vartheta\left(\ln\frac{r_0}{r_1}\right)^2 [q_0^2 r_1^2 t_1^2 - 3T_n^2 (r_0 - s_*\sin\vartheta)^2] = 0 \tag{3.18}$$

В этом уравнении под s_* следует понимать расстояние от края рассматриваемой части оболочки $s = 0$ по образующей той кольцевой окружности, для которой Δt_1 получает наименьшее положительное значение. Иными словами, s_* определяет точки, в которых путем повторного нагружения оболочки впервые достигается предел упругости материала T_n.

С помощью (1.3), (2.4), (3.2) и (3.9) из условия (3.17) для наибольшего промежутка времени $\Delta t_2 = t'' - t_1$, в течение которого повторное нагружение части оболочки $s_n(t_1) \leqslant s \leqslant l$ будет упругим, получим

$$\Delta t_2 = \frac{8 q_0 r_1 h t_1 (1-2\nu)(r_0^2 - r_1^2) \cos\vartheta \ln \frac{r_0}{r_1}}{p_0 \left[\frac{4}{3T_n^2} r_1^4 q_0^4 t_1^4 \left(\ln \frac{r_0}{r_1} \right)^2 + (1-2\nu)^2 (r_0^2 - r_1^2)^2 \right]} \tag{3.19}$$

Отметим, что интенсивность касательных напряжений своего прежнего значения впервые достигает при $s = s_n(t_1)$, т. е. повторное нагружение неупругий характер впервые получает на той кольцевой окружности, которая в конце первоначального нагружения $t = t_1$ разделяла упругую и упруго-пластическую области оболочки.

Согласно вышеизложенным рассуждениям, промежутком упругого характера Δt^* процесса повторного нагружения для всей оболочки будет наименьшее из значений Δt_1 и Δt_2, т. е.

$$\Delta t^* = \min \begin{pmatrix} \Delta t_1 \\ \Delta t_2 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Решения задачи с внутренним давлением (3.10)—(3.12), найденные для промежутка времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t_*$, в течение которого во всей оболочке происходил упругий процесс—процесс разгрузки, распространимы и на случай *упругого* повторного нагружения. Это очевидно, так как в обоих этих случаях приращения деформаций выражаются через приращения напряжений одинаковыми соотношениями упругости (1.2).

Таким образом, решения (3.10)—(3.12) справедливы для любого t, находящегося в интервале

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t^* \tag{3.21}$$

4. Численный пример

Для иллюстрации рассмотрим следующий численный пример. Пусть

$$h = 3\ см, \qquad l = 200\ см, \qquad r_0 = 80\ см, \qquad r_1 = 50\ см$$

$$E = 2 \cdot 10^6\ кг/см^2, \qquad \nu = 0.25, \qquad F_0 = 0.5 \cdot 10^{-12} \frac{см^6}{кг^3} \tag{4.1}$$

$$T_n = 1000\ кг/см^2, \qquad q_0 = 1 \frac{кг}{см^2 мин}, \qquad p_0 = 0.1 \frac{кг}{см^2 мин}$$

Допустим, что рост растягивающего напряжения $q(t)$ продлился до того момента времени t_1, при котором напряженно-деформированное состояние половины оболочки перешло границу упругости материала. Тогда с учетом (4.1) из (2.7) и (3.15) получим

$$t_1 = t_n\left(\frac{l}{2}\right) = 2252\ мин = 37.53\ час$$
$$\Delta t_* = 108\ мин = 1.8\ час \tag{4.2}$$

Нетрудно убедиться в том, что положительный корень квадратного уравнения (3.18)

$$[3.8025 + 2651 \cdot 10^{-6}\, r^4(s)]\,(\Delta t_1)^2 - 24490\,\Delta t_1 + 39.43 \cdot 10^6 - 9334\, r^2(s) = 0$$

свое наименьшее значение получает на границе раздела упругой и упруго-пластической областей оболочки при $t = t_1$ $\left(\text{т. е. } s_* = \dfrac{l}{2}\right)$, что и совпадает со значением Δt_2. Следовательно,

$$\Delta t^* = \Delta t_1\Big|_{s=\frac{l}{2}} = \Delta t_2 = 479\ мин = 7.99\ час \tag{4.3}$$

Таким образом, в рассмотренном конкретном случае промежуток времени (3.21), для которого решения задачи с внутренним давлением (3.10)—(3.12) справедливы, будет

$$37.53\ час \leqslant t \leqslant 45.52\ час \tag{4.4}$$

Этот промежуток намного шире, чем промежуток разгрузки или нейтральных изменений напряженного состояния оболочки $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t_*$ —

$$37.53\ час \leqslant t \leqslant 39.33\ час$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 XI 1966

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՊՏՏՄԱՆ ՀԱՏԱԾ ԿՈՆԱԿԱՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԱՌԱՁԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Թաղանթների անմոմենտ տեսության շրջանակներում դիտարկվում է պտտման հատած կոնական թաղանթի քվազիստատիկ հավասարակշռության խնդիրը բարդ բեռնավորման հետևյալ դեպքի համար։ Թաղանթը ազատ է մակերևույթային բեռներից ($X = Y = Z = 0$), *նրա մի ծայրը* ($s_0 = 0$) *ամրակցված է, իսկ մյուսում* ($s_1 = l$) *ազդում է ծնիչների ուղղությամբ ձգող հավասարաչափ բաշխված* q *լարում, որը գծայնորեն աճում է ըստ ժամանակի։ Ընդունվում է, որ այդ լարումը աճում է զերոյից մինչև մի որոշակի արժեք,* որի դեպքում թաղանթում առաջանում է առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տիրույթ, որից հետո ամրակցվում է $s_1 = l$ եզրը և կիրառվում ժամանակի ընթացքում նույնպես գծայնորեն աճող ներքին p ճնշում։ Ենթադրվում է, որ ձգող Q լարումը և p ճնշումը այնքան դանդաղ են աճում ըստ ժամանակի, որ կարելի է իներցիոն անդամները արհամարհել։ Պարզաբանված բեռնաթափման և առաձգական վերաբեռնավորման հարցերը, տրվում է խնդրի ճշգրիտ լուծումը գծայնորեն ամրացվող նյութի հոսունության տեսության շրջանակներում։ Բերվում է թվային օրինակ։

R. M. KIRAKOSIAN

ON AN ELASTIC-PLASTIC PROBLEM OF INTERSECTED CONICAL SHELL OF REVOLUTION

Summary

On the basis of momentless theory of shells the problem of elastic-plastic quasi-statical equilibrium of intersected conical shell of revolution for one case of complicated loading is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. Гостехиздат, М., 1956.