ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XX, № 3, 1967 Механика

Б. Т. ГАУШКО, А. Н. ЗОРИН, М. И. РОЗОВСКИЙ

О ФУНКЦИЯХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

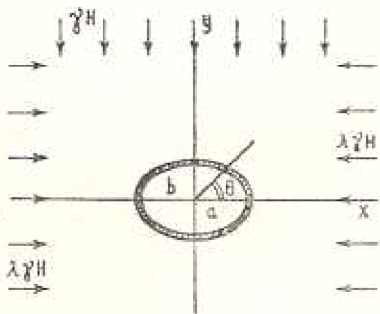
В настоящее время на глубоких шахтах Донбасса многие капитальные выработки крепятся жесткими монолитными железобетонными и бетонными крепями, не обладающими конструктивной податливостью, но имеющими плотный контакт с окружающими горными породами. Известно, что работа крепи, а следовательно, и эффективность поддержания выработки в эксплуатационном состоянии, в основном, зависит от величины и характера прикладываемых нагрузок.

Существующие методы предрасчета нагрузок на крепи не учитывают фактора времени и анизотропии, что приводит к определенным погрешностям и не позволяет определять нагрузки в течение всего срока существования выработки.

В связи с этим возникает необходимость решения задачи, позволяющей получить зависимости, определяющие нагрузки на жесткие крепи с учетом основных влияющих на них факторов.

Задача ставится следующим образом. В анизотропном горном массиве, деформированное состояние которого описывается уравнением наследственной теории ползучести [1], на глубине H от дневной поверхности пройдена горизонтальная выработка в форме эллиптического или круглого цилиндра, закрепленная по всей поверхности. Требуется определить давление на крепь (фиг. 1).

Решая задачу, примем следующие допущения и ограничения: горный массив является однородным; горные породы обладают частным видом анизотропии — являются трансверсально-изотропными; крепь выработки является абсолютно жесткой. Задача решается, как плоская.



Фиг. 1.

Отличительной особенностью задачи в указанной постановке является то, что фактор времени и анизотропия учитываются совместно.

Задача решается путем привлечения методов механики сплошных сред—теории упругости анизотропного тела и наследственной теории ползучести, в частности принципа Вольтерра, сущность которого сформулирована Ю. Н. Работновым [1].

Выражение для нормального давления на жесткую крепь, полученное в работе [2], в упругой постановке имеет вид

$$\sigma_n = \frac{\gamma H}{2l_2}\{fn[g_1\alpha_{22}C(1+\cos 2\theta)+g_2\alpha_{11}kC(1-\cos 2\theta)]+$$
$$+f[g_2(\alpha_{12}k+\alpha_{22})(1+\cos 2\theta)+g_1C^2(\alpha_{12}k+\alpha_{22})(1-\cos 2\theta)]+$$
$$+\lambda(1+\cos 2\theta)+C^2(1-\cos 2\theta)\} \qquad (1)$$

Здесь

$$f=\frac{\alpha_{11}}{k(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2+g\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}})}, \qquad k^2=\frac{\dfrac{E_1}{E_2}-\nu_2^2}{1-\nu_1^2}$$

$$n=\sqrt{2k+m}, \qquad m=\frac{E_1/G_2-2\nu_2(1+\nu_1)}{1-\nu_1^2}$$

$$g=\frac{E_1}{G_2}, \qquad \alpha_{11}=1-\nu_1^2, \qquad \alpha_{12}=-\nu_2(1+\nu_1)$$

$$\alpha_{22}=\frac{E_1}{E_2}-\nu_2^2, \qquad g_1=\lambda-\frac{\nu_2}{1-\nu_1}, \qquad g_2=k^2-\lambda\frac{\nu_2}{1-\nu_1} \qquad (2)$$

E_1 — модуль упругости для всех направлений в плоскости изотропии,

E_2 — модуль упругости для направлений, перпендикулярных к плоскости изотропии,

ν_1 — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, нормальном к плоскости изотропии при растяжении в этой плоскости,

ν_2 — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении плоскости изотропии при растяжении по нормали к этой плоскости,

E — модуль упругости для изотропной среды, γ — объемный вес породы, G_2 — модуль сдвига для плоскостей, перпендикулярных к плоскости изотропии.

При этом,

$$G_2=\frac{1}{\dfrac{4}{E_1^{45}}-\dfrac{1-2\nu}{E_1}-\dfrac{1}{E_2}} \qquad (3)$$

$E_1^{45^\circ}$ — модуль Юнга при сжатии под углом 45° к плоскости изотропии,

$C=\dfrac{a}{b}$, a и b — горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса,

γ — средневзвешенный объемный вес пород горного массива,

H — глубина расположения выработки,

$\lambda=\dfrac{\nu_2}{1-\nu_1}$, θ — полярная координата.

Как показали многочисленные исследования реологических свойств анизотропных материалов [2], [3], [4], наиболее важным является случай, когда влияние ползучести проявляется лишь при сжатии под углом 45° к плоскости изотропии. Здесь принимается, что все упругие константы, кроме $E_1^{45°}$ остаются постоянными. Поэтому, согласно принципу Вольтерра, в формуле (3) следует вместо константы $E_1^{45°}$ подставить оператор

$$\bar{E}_1 = E_{10}'\,[1 - \varkappa \text{Э}_\alpha^*(-\beta)] \tag{4}$$

где $\text{Э}_\alpha^*(-\beta)$ — интегральный оператор, воздействующий на некоторую функцию времени $\xi(t)$, или постоянную

$$\text{Э}_\alpha^*(-\beta)\,\xi(t) = \int\limits_0^t \text{Э}_\alpha(-\beta,\ t,\ s)\,\xi(s)\,ds \tag{5}$$

здесь E_{10}' — упруго-мгновенный модуль, отвечающий $E_1^{45°}$,

$\varkappa$ и β — реологические характеристики горной породы,

$\text{Э}_\alpha(-\beta,\ t,\ s)$ — ядро наследственности (функция воздействия) типа Ю. Н. Работнова [1]

$$\text{Э}_\alpha^*(-\beta,\ t-s) = (t-s)^{-\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^\nu\,(t-s)^{\nu(1-\alpha)}}{\Gamma[(\nu+1)(1-\alpha)]} \tag{6}$$

Величины E_{10}', $\varkappa$ и β определяются из экспериментальных кривых релаксации или ползучести при сжатии образца под углом 45° к плоскости изотропии.

Анализ формул (1) и (2) показывает, что вся трудность заключается в расшифровке выражения $\bar{f}\,n$. Здесь черточка сверху обозначает временной оператор. При этом

$$\bar{G}_2 = \frac{4}{\bar{E}} - \left(\frac{1-2\nu_1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) \tag{7}$$

где оператор $\bar{E}$ имеет вид (4). Все остальные величины постоянные.

Пользуясь фундаментальным свойством Э_α-операторов, установленным Ю. Н. Работновым:

$$\frac{1}{1-\varkappa\text{Э}_\alpha^*(-\beta)} = 1 + \varkappa\text{Э}_\alpha^*(\varkappa-\beta) \tag{8}$$

преобразуем выражение для $\bar{f}$ к виду

$$\bar{f} = f_0\,[1 - \varkappa_1\text{Э}_\alpha^*(-\beta_1)] \tag{9}$$

где

$$\varkappa_1 = \varkappa s, \qquad \beta_1 = \beta - \varkappa(1-s), \qquad s = \frac{4kE_{10}f_0}{E_{11}}\sqrt{\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}}}$$

$$f_0 = \frac{\alpha_{11}}{k\gamma_0} \tag{10}$$

$$\gamma_0 = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 + \left(\frac{4E_{10}}{E_{10}'} - 1 + 2\nu_{10} - \frac{E_{10}}{E_{20}}\right)\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}} \tag{11}$$

Второй сомножитель операторного выражения $\overline{f}\,\overline{n}$ имеет вид

$$\overline{n} = \sqrt{2k + \overline{m}} \tag{12}$$

где

$$\overline{m} = \frac{\dfrac{E}{G_2} - 2\nu_2(1+\nu_1)}{1-\nu_1^2} \tag{13}$$

После преобразования выражения (13) получим

$$\overline{m} = m_0\left[1 - \frac{4E_{10}\varkappa}{E_{10}'(1-\nu_1^2)\,m_0}\,\text{Э}_\alpha^*(\varkappa-\beta)\right] \tag{14}$$

где

$$m_0 = \frac{\dfrac{4E_{10}}{E_{10}'} - E_{20}\left(\dfrac{1-2\nu_1}{E_1} + \dfrac{1}{E_2}\right) - 2\nu_2(1+\nu_1)}{1-\nu_1^2} \tag{15}$$

Тогда

$$\overline{n} = \sqrt{2k + m_0 - \frac{4\varkappa E_{10}}{E_{10}'(1-\nu_1^2)}\,\text{Э}_\alpha^*(\varkappa-\beta)} \tag{16}$$

$$\overline{n} = \sqrt{h}\,\sqrt{1 + \varkappa'\text{Э}_\alpha^*(-\beta')} \tag{17}$$

Здесь

$$\beta' = \beta - \varkappa, \qquad h = 2k + m_0, \qquad \varkappa' = \frac{4\varkappa E_{10}}{E_{10}'(1-\nu_1^2)\,n_0^2}$$

$$h = n_0^2$$

Следовательно,

$$\overline{n} = n_0[1 + \varkappa'\text{Э}_\alpha^*(-\beta')]^{1/2} = n_0\left|1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\varkappa'^n\text{Э}_\alpha^{*n}(-\beta')\right| \tag{18}$$

Здесь $(-1)!! = 1$.

Рассмотрим произведение операторов

$$\overline{f}\,\overline{n} = f_0 n_0[1 - \varkappa_1\text{Э}_\alpha^*(-\beta_1)]\left|1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\varkappa'^n\text{Э}_\alpha^{*n}(-\beta')\right| =$$

$$= f_0 n_0\left|1 - \varkappa_1\text{Э}_\alpha^*(-\beta_1) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\varkappa'^n\text{Э}_\alpha^{*n}(-\beta') -\right.$$

$$\left. - \varkappa_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\varkappa'^n\text{Э}_\alpha^{*n}(-\beta')\,\text{Э}_\alpha^*(-\beta_1)\right| \tag{19}$$

Используя полученное в работе [5] выражение оператора

$$Э_\alpha^{*n}(-\beta')=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}Э_\alpha^*(-\beta')}{\partial\beta'^{n-1}} \tag{20}$$

равенство

$$Э_\alpha^*(-\beta_1)Э_\alpha^{*n}(-\beta')=\frac{Э_\alpha^*(-\beta_1)}{(\beta'-\beta_1)^n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(\beta'-\beta_1)^{n-i+1}}\frac{\partial^{i-1}Э_\alpha^*(-\beta')}{\partial\beta'^{i-1}} \tag{21}$$

полученное на основе использования фундаментального свойства $Э_\alpha^*$-операторов методом математической индукции, а также выражение $Э_\alpha^*$-оператора через функцию Миттаг-Леффлера [6], приходим к следующим равенствам:

$$Э_\alpha^{*n}(-\beta')1=\frac{1}{\beta'^n}-\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\beta'^{n-1}}\left(\frac{E_{1-\alpha}(-\beta't^{1-\alpha})}{\beta'}\right) \tag{22}$$

$$Э_\alpha^*(-\beta_1)Э_\alpha^{*n}(-\beta')1=\frac{1-E_{1-\alpha}(-\beta_1t^{1-\alpha})}{\beta_1(\beta'-\beta_1)^n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\beta'-\beta_1)^{n-i+1}\beta'^i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(\beta'-\beta_1)^{n-i+1}}\frac{\partial^{i-1}}{\partial\beta'^{i-1}}\left(\frac{E_{1-\alpha}(-\beta't^{1-\alpha})}{\beta'}\right) \tag{23}$$

Равенство (21) можно преобразовать, перейдя к пределу при $t\to\infty$.

$$\frac{1}{\beta_1\beta'^n}=\frac{1}{\beta_1(\beta'-\beta_1)^n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(\beta'-\beta_1)^{n-i+1}}\frac{\partial^{i-1}}{\partial\beta'^{i-1}}\left(\frac{1}{\beta'}\right)=$$

$$=\frac{1}{\beta_1(\beta'-\beta_1)^n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\beta'-\beta_1)^{n-i+1}\beta'^i} \tag{24}$$

Следовательно, представление (23) принимает вид

$$Э_\alpha^*(-\beta_1)Э_\alpha^{*n}(-\beta')1=\frac{1}{\beta_1\beta'^n}-\frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1t^{1-\alpha})}{\beta_1(\beta'-\beta_1)^n}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(\beta'-\beta_1)^{n-i+1}}\frac{\partial^{i-1}}{\partial\beta'^{i-1}}\left(\frac{E_{1-\alpha}(-\beta't^{1-\alpha})}{\beta'}\right) \tag{25}$$

Возвращаясь к произведению операторов $\overline{f}\,\overline{n}$, с учетом (22)—(25) получим

$$\overline{f}\,\overline{n}=f_0n_0\left[1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\left(\frac{\varkappa'}{\beta'}\right)^n-\right.$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\left(\frac{\varkappa'}{\beta'}\right)^n+\frac{\varkappa_1}{\beta_1}E_{1-\alpha}(-\beta_1t^{1-\alpha})-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\varkappa'^n\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\beta'^{n-1}}\left(\frac{E_{1-\alpha}(-\beta' t^{1-\alpha})}{\beta'}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\varkappa_1\varkappa'^n\left[\frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1 t^{1-\alpha})}{\beta_1(\beta'-\beta_1)^n}-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(\beta'-\beta_1)^{n-i+1}}\frac{\partial^{i-1}}{\partial\beta'^{i-1}}\left(\frac{E_{1-\alpha}(-\beta' t^{1-\alpha})}{\beta'}\right)\right] \qquad (26)$$

Как известно [7], для функции Миттаг-Леффлера существует следующее асимптотическое представление для достаточно больших z:

$$E_{1-\alpha}(1-z)=\frac{1}{z\Gamma(\alpha)} \qquad (27)$$

$$E_{1-\alpha}(-\beta t^{1-\alpha})=\frac{1}{\beta t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)} \qquad (28)$$

Тогда, выражение в квадратных скобках последнего слагаемого равенства (26) можно упростить

$$\frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1 t^{1-\alpha})}{\beta_1(\beta'-\beta_1)^n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(\beta'-\beta_1)^{n-i+1}}\frac{\partial^{i-1}}{\partial\beta'^{i-1}}\left(\frac{E_{1-\alpha}(-\beta' t^{1-\alpha})}{\beta'}\right)=$$

$$=\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\beta_1^2(\beta'-\beta_1)^n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{(\beta'-\beta_1)^{n-i+1}}\frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\frac{1}{\beta'^i}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{1}{(\beta'-\beta_1)^n}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{1}{\beta_1}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\beta'-\beta_1)^{n-i+1}}\frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\frac{1}{\beta'^i}\right)\right] \qquad (29)$$

Легко заметить, что

$$-\frac{1}{(\beta'-\beta_1)^n}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{1}{\beta_1}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\beta'-\beta_1)^{n-i+1}}\frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\frac{1}{\beta'^i}\right)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{1}{\beta_1\beta'^n}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\frac{1}{\beta_1\beta'^n}\right) \qquad (30)$$

Исходя из (28)—(30), преобразуем выражение (26) к следующему виду

$$\bar f\bar n=f_0n_0\left\{\left(1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\sqrt{1+\frac{\varkappa'}{\beta'}}+\frac{\varkappa_1}{\beta_1^2 t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}+\right.$$

$$+\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\frac{1}{\beta'^n}\right)\varkappa'^n-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\varkappa_1\varkappa'^n\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\left[\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{1}{\beta_1\beta'^n}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\frac{1}{\beta_1\beta'^n}\right)\right] \qquad (31)$$

Следовательно,

$$\overline{f n}=f_0n_0\left\{\left[\left(1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\sqrt{1+\frac{\varkappa_1}{\beta'}}-\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\frac{\varkappa'^n}{\beta'^n}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\frac{\varkappa'^n}{\beta'^n}-$$

$$\left.\left.-\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\beta'}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\frac{\varkappa'^n}{\beta'^n}\right]\right\}=$$

$$=f_0n_0\left(1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\sqrt{1+\frac{\varkappa'}{\beta'}}-$$

$$-\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\frac{\varkappa'^n}{\beta'^n}\right]+$$

$$+\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\beta'}\left[\left(1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\frac{\varkappa'^n}{\beta'^n}\right]=$$

$$=f_0n_0\left(1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\sqrt{1+\frac{\varkappa'}{\beta'}}+$$

$$+\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\sqrt{1+\frac{\varkappa'}{\beta_1}}+$$

$$+\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\beta'}\left(1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\sqrt{1+\frac{\varkappa'}{\beta'}} \qquad (32)$$

Окончательно будем иметь

$$\overline{f n}=f_0n_0\left(1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\sqrt{1+\frac{\varkappa'}{\beta'}}+\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(1+\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\sqrt{1+\frac{\varkappa'}{\beta'}}+$$

$$+\frac{1}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\beta'}\left(1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\sqrt{1+\frac{\varkappa'}{\beta'}} \qquad (33)$$

при $t\to\infty$

$$(\overline{f n})_\infty=f_0n_0\left(1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)\sqrt{1+\frac{\varkappa'}{\beta'}}$$

$$(\bar{f})_\infty=f_0\left(1-\frac{\varkappa_1}{\beta_1}\right)$$

$$(\bar{n})_\infty = n_0 \sqrt{1 + \frac{\varkappa'}{\beta'}} \tag{34}$$

Для определения нагрузок на крепь в любой момент существования горной выработки следует для этого момента вычислить выражение (33) и, подставив его в формулу (1), получить искомые величины.

Конечные установившиеся величины нагрузок могут быть определены из выражения

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma H}{2l^2}\Big\{ f_0 n_0 \Big(1 - \frac{\varkappa_1}{\beta_1}\Big) \sqrt{1 + \frac{\varkappa'}{\beta'}} \,[g_1 a_{22} C (1 + \cos 2\theta) +$$

$$+ g_2 a_{11} k C (1 - \cos 2\theta)] + f_0 \Big(1 - \frac{\varkappa_1}{\beta_1}\Big) [g_2 (a_{12} k + a_{22}) (1 + \cos 2\theta) +$$

$$+ g_1 C^2 (a_{12} k + a_{22}) (1 - \cos 2\theta)] + \lambda (1 + \cos 2\theta) + C^2 (1 - \cos 2\theta)\Big\} \tag{35}$$

Анализ зависимостей (33) и (1) показал, что нагрузки на жесткую крепь, в основном, зависят от глубины расположения выработки, времени ее существования, а также от упругих (E_1, E_2, ν_1, ν_2, C_2) и реологических ($\varkappa'$ и β') характеристик вмещающих пород и от их анизотропии, которая характеризуется параметрами (k и m). (Упругие и реологические характеристики и анизотропные свойства горных пород определяются в лабораторных условиях).

При прочих равных условиях с увеличением глубины расположения выработки нагрузки на крепь увеличиваются.

В породах с затухающей ползучестью нагрузки на жесткие крепи с течением времени увеличиваются, однако небеспредельно и при $t \to \infty$ имеют конечную величину, определяющуюся выражением (35).

Днепропетровский горный
институт

Поступила 15 VII 1966

Վ. Տ. [illegible]

ՀԱՏՈՒԿ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՆՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ինտեգրալ-օպերատորային մեթոդի հիման վրա ժառանգականության տիպի ֆիզիկական կախվածության առկայության դեպքում, դիտարկվում են հատուկ ռեոլոգիական օպերատորների ֆունկցիաների կիրառությունները կոշտ էլիպտական ներդրվածքով ուղղանկյուն-իզոտրոպ սալի լարվածային և դեֆորմացիոն վիճակների որոշման խնդրում: Նշված խնդիրը մոդելավորվում է լեռնային ապարահանում-ամրացում սխեմը, լեռնային ապարի սողքի դեպքում:

V. T. GLUSHCO, A. N. ZORIN, M. I. ROZOVSKY

ON FUNCTIONS OF SPECIAL OPERATORS AND THEIR APPLICATION TO THE THEORY OF CREEP OF ANISOTROPIC SOLIDS

S u m m a r y

A method of integral operators and initial physical dependences are used to examine functions of special rheological operators applied in the problem of a stressed plate with an elliptical inclusion, modeling thus an excavation-timbering system during rock creep.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
2. *Лехницкий С. Г.* Теоретическое исследование напряжений в упругом анизотропном массиве вблизи подземной выработки эллиптического сечения. Тр. по вопр. горн. давления, сдвижения горных пород и методики маркшейдерских работ ВНИМИ, сб. 45, 1962.
3. *Брызгалин Г. И.* К расчету на ползучесть пластинок из стеклопластиков. Ж. прикл. механ. и техн. физ., № 4, 1963.
4. *Колтунов М. А., Безухов В. Н.* Анализ ползучести изотропного стеклопластика. Вестник МГУ, серия матем. и мех., № 6, 1963.
5. *Розовский М. И.* Об одном свойстве степени специального оператора и его приложение к решению упруго-наследственных динамических задач. Сб. „Ползучесть и длительная прочность", СО АН СССР, 1963.
6. *Розовский М. И.* О некоторых особенностях упруго-наследственных сред. Изв. АН СССР, мех. и маш., № 2, 1961.
7. *Розовский М. И.* Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1959.