ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

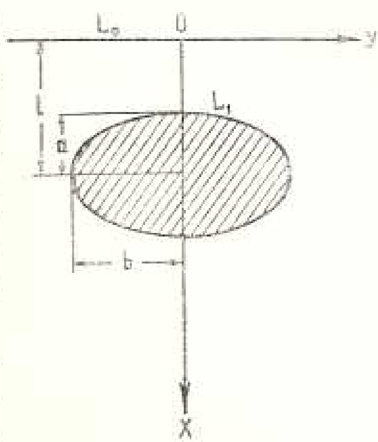
Մեխանիկա XX, № 3, 1967 Механика

С. А. КАЛОЕРОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ УПРУГИМ ЯДРОМ

В работе [1] рассмотрена задача о напряженном состоянии анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием. Здесь решена задача о напряженном состоянии такой же полуплоскости в случае, когда отверстие подкреплено упругим ядром, которое изготовлено из другого анизотропного материала.

§ 1. Рассмотрим упругую анизотропную полуплоскость с эллиптическим отверстием, полуоси которого равны a и b. Обозначим расстояние между центром отверстия и границей полуплоскости через l, контур эллиптического отверстия — через L_1, границу полуплоскости — через L_0 (фиг. 1).



Фиг. 1.

Пусть в отверстие без предварительного натяжения впаяно или вклеено ядро из другого анизотропного материала. Полуплоскость подвержена действию внешних усилий, действующих вдали от отверстия.

Определение напряженного состояния полуплоскости и ядра, как известно, приводится к нахождению функций комплексных переменных $\Phi_j(z_j)$ и $\Psi_j(z_j^1)$ $(j=1, 2)$, удовлетворяющих следующим условиям* [3]:

$$\left.\begin{aligned} &2\,\mathrm{Re}\left[\Phi_1(z_1)+\Phi_2(z_2)\right]=0\\ &2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1\Phi_1(z_1)+\mu_2\Phi_2(z_2)\right]=0\end{aligned}\right\}\quad \text{на } L_0 \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &2\,\mathrm{Re}\left[\Phi_1(z_1)+\Phi_2(z_2)\right]=f_{11}+2\,\mathrm{Re}\left[\Psi_1(z_1^1)+\Psi_2(z_2^1)\right]\\ &2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1\Phi_1(z_1)+\mu_2\Phi_2(z_2)\right]=f_{12}+2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1^1\Psi_1(z_1^1)+\mu_2^1\Psi_2(z_2^1)\right]\\ &2\,\mathrm{Re}\left[p_1\Phi_1(z_1)+p_2\Phi_2(z_2)\right]=-u_0+2\,\mathrm{Re}\left[p_1^1\Psi_1(z_1^1)+p_2^1\Psi_2(z_2^1)\right]\\ &2\,\mathrm{Re}\left[q_1\Phi_1(z_1)+q_2\Phi_2(z_2)\right]=-v_0+2\,\mathrm{Re}\left[q_1^1\Psi_1(z_1^1)+q_2^1\Psi_2(z_2^1)\right]\end{aligned}\right\}\quad \text{на } L_1 \tag{1.2}$$

Здесь f_{1i} $(i=1, 2)$ — функции, характеризующие загружения сплошной полуплоскости; u_0 и v_0 — проекции смещения в сплошной

* Здесь и в дальнейшем величины с индексом 1 вверху относится к ядру, а без индексов — к полуплоскости.

полуплоскости, возникшие под действием внешних усилий; μ_k и μ_k^1 — комплексные параметры для полуплоскости и ядра, их будем в дальнейшем считать чисто мнимыми, т. е. $\mu_1 = i\beta$, $\mu_1^1 = i\beta^1$, $\mu_2 = i\delta$, $\mu_2^1 = i\delta^1$; наконец, постоянные p_j и q_j определяются по следующим формулам [3]:

$$p_1 = a_{12} - a_{11}\beta^2, \quad p_2 = a_{12} - a_{11}\delta^2$$

$$q_1 = i\left(a_{12}\beta - \frac{a_{22}}{\beta}\right), \qquad q_2 = i\left(a_{12}\delta - \frac{a_{22}}{\delta}\right)$$

Параметры p_j^1 и q_j^1 получаются из p_j и q_j, если заменить в последних a_{ik}, β и δ на a_{ik}^1, β^1 и δ^1. Коэффициенты a_{ik} и a_{ik}^1 — упругие постоянные соответственно полуплоскости и ядра.

Функции $\Phi_j(z_j)$ определены в областях S_j, получаемых из заданной области путем использования аффинных преобразований вида $z_j = x + \mu_j y$. В этих областях будем иметь полуплоскости с эллиптическими отверстиями, полуоси которых будут соответственно a, βb и a, δb. При этом расстояния от центров эллипсов до границ полуплоскостей не изменяются и будут равны l. Функции же $\Psi_j(z_j^1)$ определены и голоморфны в эллипсах, получаемых из заданного эллипса аффинными преобразованиями $z_j^1 = x + \mu_j^1 y$.

Функции $\Phi_j(z_j)$ будем искать в виде

$$\Phi_j(z_j) = \Phi_{j0}(z_j) + \Phi_{j1}(z_j) \tag{1.3}$$

где $\Phi_{j0}(z_j)$ — функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, а $\Phi_{j1}(z_j)$ — вне контуров эллиптических отверстий в областях S_j. Последние представим так:

$$\Phi_{11}(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{[\zeta_1(z_1^*)]^k}, \qquad \Phi_{21}(z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{[\zeta_2(z_2^*)]^k} \tag{1.4}$$

Здесь a_k и b_k — произвольные комплексные постоянные, подлежащие определению, $z_j^* = z_j - l$, а ζ_j связаны с z_j^* следующими неявными зависимостями:

$$z_1^* = m_0\zeta_1 + \frac{m_1}{\zeta_1}, \qquad z_2^* = n_0\zeta_2 + \frac{n_1}{\zeta_2} \tag{1.5}$$

При этом

$$m_0 = \frac{a + \beta b}{2}, \quad m_1 = \frac{a - \beta b}{2}, \quad n_0 = \frac{a + \delta b}{2}, \quad n_1 = \frac{a - \delta b}{2} \tag{1.6}$$

Из граничных условий (1.1) методом Н. И. Мусхелишвили [5] найдем где

$$\begin{aligned} \Phi_{10}(z_1) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{l_1\overline{a}_k}{[\overline{\zeta}_1(z_1^*)]^k} + \frac{l_2\overline{b}_k}{[\overline{\zeta}_2(z_1^*)]^k}\right\} \\ \Phi_{20}(z_2) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{l_3\overline{a}_k}{[\overline{\zeta}_1(z_2^*)]^k} - \frac{l_1\overline{b}_k}{[\overline{\zeta}_2(z_2^*)]^k}\right\} \end{aligned} \qquad (1.7)$$

где

$$l_1 = \frac{\beta+\delta}{\beta-\delta}, \qquad l_2 = \frac{2\delta}{\beta-\delta}, \qquad l_3 = \frac{2\beta}{\delta-\beta}$$

Функции $[\overline{\zeta}_l(z_j^*)]^{-k}$ можно разложить внутри эллипсов в областях S_j в сходящиеся ряды по полиномам Фабера [4]

$$[\overline{\zeta}_1(z_j^*)]^{-k} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl}^{(j)} P_{jl}(z_j^*), \qquad [\overline{\zeta}_2(z_j^*)]^{-k} = \sum_{l=0}^{\infty} B_{kl}^{(j)} P_{jl}(z_j^*) \qquad (1.8)$$

Через $P_{jl}(z_j^*)$ здесь обозначены полиномы Фабера для эллипсов в областях S_j. Они связаны с ζ_j простыми зависимостями:

$$P_{1l}(z_1^*) = \zeta_1^l + \frac{m^l}{\zeta_1^l}, \qquad P_{2l}(z_2^*) = \zeta_2^l + \frac{n^l}{\zeta_2^l}, \qquad \left(m = \frac{m_1}{m_0}, \quad n = \frac{n_1}{n_0}\right) \quad (1.9)$$

Теперь функции $\Phi_j(z_j)$ в области сходимости разложений (1.8) примут вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{a_k}{\zeta_1^k} + \sum_{l=1}^{\infty}(l_1 A_{kl}^{(1)}\overline{a}_k + l_2 B_{kl}^{(1)}\overline{b}_k) P_{1l}(z_1^*)\right\} \\ \Phi_2(z_2) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{b_k}{\zeta_2^k} + \sum_{l=1}^{\infty}(l_3 A_{kl}^{(2)}\overline{a}_k - l_1 B_{kl}^{(2)}\overline{b}_k) P_{2l}(z_2^*)\right\} \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Функции $\Psi_j(z_j^1)$ голоморфны в эллипсах, получаемых из данного эллипса путем использования аффинных преобразований $z_j^1 = x + \mu_j y$. Поэтому их можно представить в виде рядов

$$\Psi_1(z_1^1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k P_{1k}^1(z_1^1), \qquad \Psi_2(z_2^1) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k P_{2k}^1(z_2^1) \qquad (1.11)$$

где

$$P_{1k}^1(z_1^1) = \zeta_1^k + \frac{(m^1)^k}{\zeta_1^k}, \qquad P_{2k}^1(z_2^1) = \zeta_2^k + \frac{(n^1)^k}{\zeta_2^k} \qquad (1.12)$$

При этом ζ_j связаны с z_j^1 с помощью неявных зависимостей

$$z_1^1 = m_0^1\zeta_1 + \frac{m_1^1}{\zeta_1}, \qquad z_2^1 = n_0^1\zeta_2 + \frac{n_1^1}{\zeta_2} \qquad (1.13)$$

Постоянные m_0^1, m_1^1, n_0^1, n_1^1, m^1, n^1 получаются из m_0, m_1, n_0, n_1, m, n, если в последних заменить μ_j на μ_j^1.

Если теперь подставить в граничные условия (1.2) выражения (1.10) и (1.11), то применением известного метода рядов для определения постоянных a_k, b_k, c_k, d_k получим следующую бесконечную алгебраическую систему:

$$a_k + b_k - [(m^1)^k + 1]c_k - [(n^1)^k + 1]d_k + \sum_{p=1}^{\infty} [(l_1 m^k A^{(1)}_{pk} + l_3 n^k A^{(2)}_{pk})\overline{a}_p +$$

$$+ (l_1 A^{(1)}_{pk} + l_3 A^{(2)}_{pk})\, a_p + (l_2 m^k B^{(1)}_{pk} - l_1 n^k B^{(2)}_{pk})\, \overline{b}_p +$$

$$+ (l_2 B^{(1)}_{pk} - l_1 B^{(2)}_{pk})\, b_p] = \alpha_k \tag{1.14}$$

$$\beta a_k + \delta b_k - \beta^1 [(m^1)^k - 1] c_k - \delta^1 [(n^1)^k - 1] d_k + \sum_{p=1}^{\infty} [(\beta l_1 m^k A^{(1)}_{pk} +$$

$$+ \delta l_3 n^k A^{(2)}_{pk})\, \overline{a}_p - (\beta l_1 A^{(1)}_{pk} + \delta l_3 A^{(2)}_{pk})\, a_p + (\beta l_2 m^k B^{(1)}_{pk} -$$

$$- \delta l_1 n^k B^{(2)}_{pk})\, \overline{b}_p - (\beta l_2 B^{(1)}_{pk} - \delta l_1 B^{(2)}_{pk})\, b_p] = \beta_k$$

$$p_1 a_k + p_2 b_k - p_1^1 [(m^1)^k + 1]\, c_k - p_2^1 [(n^1)^k + 1]\, d_k + \sum_{p=1}^{\infty} [(p_1 l_1 m^k A^{(1)}_{pk} +$$

$$+ p_2 l_3 n^k A^{(2)}_{pk})\, \overline{a}_p + (p_1 l_1 A^{(1)}_{pk} + p_2 l_3 A^{(2)}_{pk})\, a_p + (p_1 l_2 m^k B^{(1)}_{pk} -$$

$$- p_2 l_1 n^k B^{(2)}_{pk})\, \overline{b}_p + (p_1 l_2 B^{(1)}_{pk} - p_2 l_1 B^{(2)}_{pk})\, b_p] = \gamma_k$$

$$q_1^* a_k + q_2^* b_k - q_1^1 [(m^1)^k - 1]\, c_k - q_2^1 [(n^1)^k - 1]\, d_k + \sum_{p=1}^{\infty} [(q_1^* l_1 m^k A^{(1)}_{pk} +$$

$$+ q_2^* l_3 n^k A^{(2)}_{pk})\, \overline{a}_p - (q_1^* l_1 A^{(1)}_{pk} + q_2^* l_3 A^{(2)}_{pk})\, a_p + (q_1^* l_2 m^k B^{(1)}_{pk} -$$

$$- q_2^* l_1 n^k B^{(2)}_{pk})\, \overline{b}_p - (q_1^* l_2 B^{(1)}_{pk} - q_2^* l_1 B^{(2)}_{pk})\, b_p] = \delta_k$$

где

$$q_k^* = -iq_k$$

Производя над системой (1.14) некоторые алгебраические преобразования, запишем ее в виде

$$a_k + \sum_{p=1}^{\infty} [(t_{11} A^{(1)}_{pk} + t_{12} A^{(2)}_{pk})\overline{a}_p + (t_{13} A^{(1)}_{pk} + t_{14} A^{(2)}_{pk}) a_p +$$

$$+ (t_{15} B^{(1)}_{pk} + t_{16} B^{(2)}_{pk})\, \overline{b}_p + (t_{17} B^{(1)}_{pk} + t_{18} B^{(2)}_{pk})\, b_p] = \alpha_k^* \tag{1.15}$$

$$b_k + \sum_{p=1}^{\infty} [(t_{21} A^{(1)}_{pk} + t_{22} A^{(2)}_{pk})\overline{a}_p + (t_{23} A^{(1)}_{pk} + t_{24} A^{(2)}_{pk})\, a_p +$$

$$+ (t_{25}B_{pk}^{(1)} + t_{26}B_{pk}^{(2)})\,\overline{b}_p + (t_{27}B_{pk}^{(1)} + t_{28}B_{pk}^{(2)})\,b_p] = \beta_k^*$$

$$c_k = \gamma_k^* + \sum_{p=1}^{\infty}[(s_{11}A_{pk}^{(1)} + s_{12}A_{pk}^{(2)})\overline{a}_p + (s_{13}A_{pk}^{(1)} + s_{14}A_{pk}^{(2)})\,a_p +$$

$$+ (s_{15}B_{pk}^{(1)} + s_{16}B_{pk}^{(2)})\,\overline{b}_p + (s_{17}B_{pk}^{(1)} + s_{18}B_{pk}^{(2)})\,b_p] \qquad (1.16)$$

$$d_k = \delta_k^* + \sum_{p=1}^{\infty}[(s_{21}A_{pk}^{(1)} + s_{22}A_{pk}^{(2)})\overline{a}_p + (s_{23}A_{pk}^{(1)} + s_{24}A_{pk}^{(2)})\,a_p +$$

$$+ (s_{25}B_{pk}^{(1)} + s_{26}B_{pk}^{(2)})\,\overline{b}_p + (s_{27}B_{pk}^{(1)} + s_{28}B_{pk}^{2})\,b_p]$$

Постоянные α_k^*, β_k^*, γ_k^*, δ_k^* зависят от правых частей системы (1.14) и от упругих постоянных полуплоскости и ядра. Коэффициенты же t_{in} и s_{in} ($i = 1, 2;\ n = 1, 2, \cdots, 8$) зависят только от упругих постоянных полуплоскости и ядра.

Учитывая, что коэффициенты t_{in} остаются ограниченными при $k \to \infty$, можно доказать так же, как и в работе [2], что система (1.15) является квазирегулярной. Поэтому ее можно решать методом редукции.

После определения из системы (1.15) коэффициентов a_k, b_k функции $\Phi_j(z_j)$ становятся известными. Через них напряжения, возникающие в полуплоскости, выражаются следующим образом:

$$\sigma_x = \sigma_x^0 - 2\,\mathrm{Re}\,[\beta^2\Phi_1'(z_1) + \delta^2\Phi_2'(z_2)]$$

$$\sigma_y = \sigma_y^0 + 2\,\mathrm{Re}\,[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)] \qquad (1.17)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^0 - 2\,\mathrm{Re}\,[i\beta\Phi_1'(z_1) + i\delta\Phi_2'(z_2)]$$

Здесь σ_x^0, σ_y^0, τ_{xy}^0 — напряжения, возникающие в сплошной полуплоскости, а функции $\Phi_j'(z_j)$ выражаются через ζ_j так:

$$\Phi_1'(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{a_k}{(m_1 - m_0\zeta_1^2)\,\zeta_1^{k-1}} - \frac{l_1\overline{a}_k}{(m_1 - m_0\overline{\zeta}_1^2)\,\overline{\zeta}_1^{k-1}} - \frac{\lambda_1 l_2\overline{b}_k}{(n_1 - n_0\overline{\zeta}_2^2)\,\overline{\zeta}_2^{k-1}}\right\} \qquad (1.18)$$

где

$$\zeta_1(z_1) = \frac{z_1 - l \pm \sqrt{(z_1 - l)^2 - 4m_0m_1}}{2m_0}$$

$$\overline{\zeta}_1(z_1) = -\frac{z_1 + l + \sqrt{(z_1 + l)^2 - 4m_0m_1}}{2m_0}$$

$$\overline{\zeta}_2(z_1) = -\frac{\lambda_1 z_1 + l + \sqrt{(\lambda_1 z_1 + l)^2 - 4n_0n_1}}{2n_0}$$

$$\lambda_1 = \frac{\delta}{\beta}$$

В первом выражении знак перед радикалом следует выбрать таким образом, чтобы большим значениям $|z_1|$ соответствовали большие значения $|\zeta_1|$.

Выражение для определения $\Phi_2'(z_2)$ получим из выражения (1.18), если поменять в нем местами a_k и b_k, z_1 и z_2, β и δ.

Напряжения σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$, действующие на площадках, касательных и нормальных к контуру эллиптического отверстия, вычисляются по формулам

$$\sigma_r = \frac{1}{L^2}(b^2\sigma_x\cos^2\theta + a^2\sigma_y\sin^2\theta + 2ab\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{L^2}(a^2\sigma_x\sin^2\theta + b^2\sigma_y\cos^2\theta - 2\,ab\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{L^2}[ab(\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)]$$

Здесь

$$L^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

Для определения напряжений в ядре по формулам (1.16) находим c_k, d_k. После определения этих коэффициентов функции $\Psi_j(z_j^1)$ становятся известными, и напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_x^1 = -2\,\mathrm{Re}[(\beta^1)^2\Psi_1'(z_1^1) + (\delta^1)^2\Psi_2'(z_2^1)]$$

$$\sigma_y^1 = 2\,\mathrm{Re}[\Psi_1'(z_1^1) + \Psi_2'(z_2^1)]$$

$$\tau_{xy}^1 = -2\,\mathrm{Re}[i\beta^1\Psi_1'(z_1^1) + i\delta^1\Psi_2'(z_2^1)]$$

Функции $\Psi_j'(z_j^1)$ получаются дифференцированием выражений (1.11). При этом производные от полиномов Фабера находятся по рекуррентным формулам

$$P_{j0}'^{1} = 0, \quad P_{j1}'^{1} = 1$$

$$P_{jk+1}'^{1} = P_{jk}^1 + z_j^1 P_{jk}'^{1} - r_j P_{j\,k-1}'^{1} \quad (k > 1)$$

$$r_1 = m^1, \quad r_2 = n^1$$

Из системы (1.14) легко получить систему для определения постоянных a_k, b_k для случая, когда ядро является абсолютно жестким или абсолютно гибким. В первом случае нужно положить во всех формулах $a_{ik}^1 = 0$, а во втором—перейти к пределу при $a_{ik}^1 \to \infty$.

§ 2. Пусть полуплоскость растягивается усилиями интенсивности p, приложенными к ней на бесконечности параллельно ее границе.

В этом случае

$$\sigma_x^0 = \tau_{xy}^0 = 0, \qquad \sigma_y^0 = p$$

$$\alpha_1 = -\frac{a}{2}, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = -\frac{a}{2}a_{12}, \quad \delta_1 = -\frac{b}{2}a_{22}$$

$$\alpha_k = \beta_k = \gamma_k = \delta_k = 0 \quad (k \geq 2) \tag{2.1}$$

Для такого загружения, как видно из системы (1.14), коэффициенты a_k, b_k, c_k, d_k получаются вещественными, и системы (1.14) и (1.15) несколько упрощаются.

При проведении расчетов было принято, что упругие постоянные для ядра пропорциональны упругим постоянным для полуплоскости, т. е.

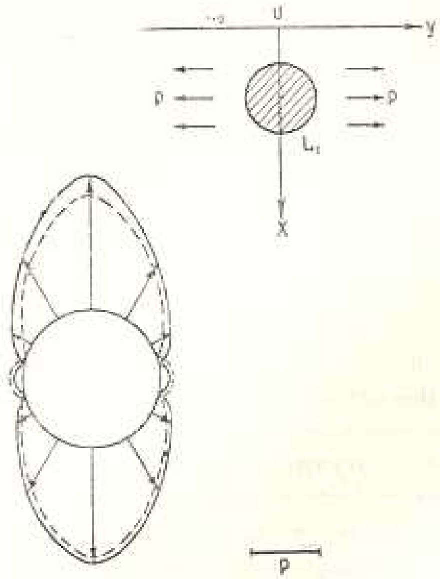
$$a^1_{ik} = \lambda a_{ik} \tag{2.2}$$

Нами в широких пределах варьировались расстояние l между центром эллиптического отверстия и границей полуплоскости, а также коэффициент пропорциональности λ и отношение $c = b/a$. Полуплоскость считалась изготовленной из различных ортотропных материалов. Все вычисления по определению напряжений запрограммированы и проводились на быстродействующей электронной вычислительной машине Урал—2. Незначительную часть проведенных расчетов приводим ниже. Во всех случаях, если противное не оговорено, полуплоскость считалась изготовленной из авиационной фанеры, для которой $\beta = 4.11$, $\delta = 0.343$.

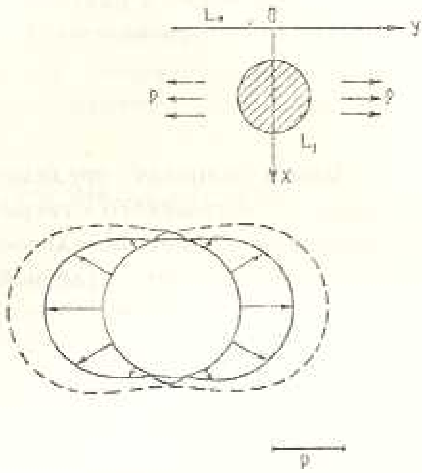
В полученном нами решении граничные условия на границе полуплоскости L_0 удовлетворялись точно, а в точках L_1 на поверхности контакта полуплоскости и ядра—приближенно, т. к. бесконечная алгебраическая система (1.15) при проведении вычислений была урезана. Количество уравнений при ее решении варьировалось от двух до двадцати восьми, т. е. увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на L_1 не удовлетворялись с очень высокой точностью. Точность выполнения граничных условий в отдельных точках спая контролировалась вычислением напряжений σ_r, $\tau_{r\theta}$ в полуплоскости и σ^1_r, $\tau^1_{r\theta}$ в ядре.

В табл. 1 даны значения напряжений σ_r и σ_θ, действующих соответственно на площадках, касательных и нормальных к контуру кругового отверстия для разных расстояний между центром отверстия и границей полуплоскости, а на фиг. 2 изображен график распределения напряжений σ_θ при $l = 1.1a$. Пунктирная линия на графике относится к случаю, когда вместо полуплоскости рассматривается плоскость с таким же ядром. Здесь и ниже, если противное не оговорено, ядро считали изготовленным из такого материала, для которого упругие постоянные $a^1_{ik} = 2a_{ik}$. Как видно из таблицы и графика, прямолинейная граница оказывает незначительное влияние на концентрацию напряжений.

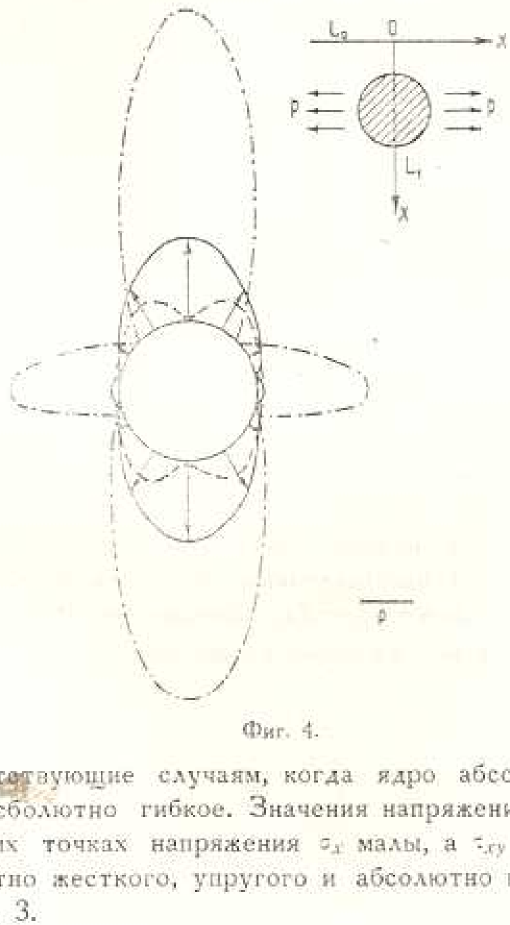
В табл. 2 приведены значения напряжений σ_r и σ_θ для разных жесткостей ядра, когда $l = 1.5a$. Значение $\lambda = 0$ относится к случаю абсолютно жесткого ядра, а $\lambda = \infty$ — к случаю, когда ядро отсутствует. На фиг. 3, 4 изображены графики распределения напряжений σ_r и σ_θ, когда $\lambda = 2$, т. е. $a^1_{ik} = 2a_{ik}$. Здесь же пунктирной и штрихпунктирной линиями проведены графики распределения этих напря-



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

жений, соответствующие случаям, когда ядро абсолютно жесткое и когда ядро абсолютно гибкое. Значения напряжений σ_y в точках перемычки (в этих точках напряжения σ_x малы, а τ_{xy} равны нулю) для случая абсолютно жесткого, упругого и абсолютно гибкого ядра приведены в табл. 3.

Таблица 1

l/a \ $\theta°$	2		1.5		1.1		1.05	
	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ
0	−0.040	1.614	−0.039	1.620	−0.022	1.633	−0.014	1.636
30	0.172	0.863	0.175	0.873	0.187	0.882	0.191	0.884
60	0.595	0.265	0.599	0.272	0.610	0.283	0.612	0.283
90	0.809	−0.124	0.815	−0.113	0.830	−0.098	0.834	−0.098
120	0.602	0.255	0.612	0.259	0.638	0.268	0.645	0.266
150	0.174	0.867	0.180	0.880	0.207	0.931	0.217	0.941
180	−0.049	1.635	−0.050	1.672	−0.031	1.897	−0.019	2.079

Таблица 2

λ \ θ	0		0.1		0.5		1		2		10		∞
	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_θ
0	0,070	0.002	0.060	0.129	0.290	0.568	0	1	−0.039	1.620	−0.096	3.273	4.553
30	0.381	0.558	0.364	0.582	0.305	0.666	0.250	0.750	0.175	0.873	0.016	1.215	1.491
60	1.000	0.217	0.968	0.221	0.857	0.236	0.750	0.250	0.599	0.272	0.226	0.330	0.325
90	1.299	0.092	1.261	0.086	1.129	0.052	1	0	0.815	−0.114	0.333	−0.783	−2.157
120	0.969	0.203	0.941	0.210	0.845	0.233	0.750	0.250	0.612	0.259	0.249	0.118	−0.406
150	0.366	0.525	0.351	0.555	0.300	0.655	0.250	0.750	0.180	0.880	0.028	1.116	0.971
180	0,082	0.003	0.072	0.123	0.036	0.554	0	1	−0.050	1.672	−0.126	3.733	5.959

Таблица 3

l/a \ [illegible]	Жесткое ядро			Упругое ядро			Свободное отверстие		
	2	1.5	1.1	2	1.5	1.1	2	1.5	1.1
0	0.965	0.733	0.224	1.046	1.143	1.640	0.675	0.557	0.215
$1/4\ (l-1)$	0.942	0.711	0.213	1.079	1.173	1.650	1.267	1.488	2.612
$1/2\ (l-1)$	0.917	0.654	0.179	1.111	1.218	1.687	1.565	2.106	4.814
$3/4\ (l-1)$	0.842	0.520	0.115	1.184	1.313	1.760	2.047	2.958	7.351
$l-1$	0.003	0.003	0.001	1.635	1.672	1.897	4.966	5.959	11.158

Таблица 4

c \ $\theta°$	0.2		0.5		1		2		5	
	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ
0	−0.006	1.892	−0.031	1.766	−0.039	1.620	−0.025	1.455	−0.006	1.262
30	0.844	0.153	0.491	0.508	0.175	0.873	0.032	1.129	0.003	1.212
60	0.934	−0.033	0.813	0,071	0.599	0.272	0.298	0.571	0.055	0.919
90	0.948	−0,082	0.886	−0.117	0.815	−0.114	0.733	−0.093	0.631	−0.115
120	0.938	−0.042	0.822	0.565	0.612	0.259	0.310	0.562	0.061	0.893
150	0.850	0.139	0.499	0.497	0.180	0.880	0.034	1.161	0.000	1.241
180	−0.018	1.909	−0.049	1.801	−0.050	1.672	−0.029	1.530	−0.006	1.385

Таблица 5

θ \ c	Фанера, растянутая поперек волокон			СВАМ		
	0.2	1	5	0.2	1	5
0	1.921	1.698	1.328	1.866	1.560	1.230
30	0.118	0.792	1.212	0.129	0.994	1.194
60	−0.010	0.237	0.835	−0.522	0.259	1.003
90	−0.032	−0.060	−0.030	−0.083	−0.152	−0.110
120	−0.013	0.229	0.332	−0.063	0.226	0.966
150	0.113	0.796	1.249	0.110	0.985	1.235
180	1.934	1.741	1.434	1.889	1.623	1.395

Из таблиц и графиков видно, что подкрепление отверстия упругим или жестким ядром значительно снижает концентрацию напряжений около отверстия и в точках перемычки и изменяет картину их распределения. Особенно эффективно влияние подкрепления для близких расстояний l. Полуплоскость с подкрепленным отверстием, когда упругие постоянные подкрепляющего ядра меньше упругих постоянных полуплоскости, можно считать плоскостью с таким же ядром, начиная уже с расстояний между границами L_0 и L_1, равных полуоси a. Для полуплоскости же со свободным отверстием влияние границы L_0 начинается гораздо раньше, и при сближении границ L_0 и L_1 сильно возрастает концентрация напряжений в точках перемычки, близких к точкам контура отверстия.

В табл. 4 приведены значения напряжений σ_r и σ_θ в случае растяжения полуплоскости из авиационной фанеры вдоль волокон рубашки ($\beta = 4.11$, $\delta = 0.343$) для различных значений отношения полуосей эллипса, когда $l = 1.5a$, в табл. 5 даны значения напряжений σ_θ для некоторых c при растяжении полуплоскости из фанеры поперек волокон рубашки ($\beta = 0.243$, $\delta = 2.91$) и слабоанизотропного стекловолокнистого материала СВАМ ($\beta = 1.89$, $\delta = 0.531$). Из таблиц видно, что величина отношения c и анизотропия незначительно влияют на концентрацию напряжений. Их влияние, как показывают расчеты, значительно возрастает в случае свободного отверстия. В этом случае в сильно анизотропной полуплоскости быстро возрастают напряжения в точках перемычки вблизи от контура эллиптического отверстия, когда $c < 1$.

Нами вычислялись также значения напряжений $\tau_{r\theta}$ на контуре спая. Они оказались значительно меньшими по сравнению с σ_r и σ_θ и потому их не приводим.

Саратовский государственный университет

Поступила 30 VIII 1966

Ս. Ա. ԿԱԼՈԵՐՈՎ

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՇԽՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ԷԼԻՊՏԻԿ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻՋՈՒԿ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է էլիպտիկ առաձգական միջուկ ունեցող անիզոտրոպ կիսահարթության լարվածային վիճակի խնդիրը։

Խնդիրը բերվում է հանրահաշվական անվերջ սիստեմի լուծմանը։ Ցույց է տրված այդ սիստեմի քվազիռեգուլյարությունը։

Մանրամասն ուսումնասիրված է լարումների բաշխվածությունը միջուկ ունեցող կիսահարթությունում՝ նրա ձգման դեպքում։

S. A. KALOEROV

DISTRIBUTION OF STRESSES IN THE ANISOTROPIC SEMI-PLANE WITH AN ELLIPTIC ELASTIC KERNEL

S u m m a r y

In this paper the strained state in the anisotropic semi-plane with elliptic kernel is considered.

The problem is reduced to the solution of an infinite system of algebraic equations. The quasi-regularity of this system is shown.

A detail analysis of the stress distribution in the semi-plane with the indicated kernel is examined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Космодамианский А. С.* Упругое равновесие анизотропной полуплоскости, ослабленной эллиптическим отверстием. Тр. Груз. полит. ин-та, № 8 (193), 1963.
2. *Космодамианский А. С.* Квазирегулярность бесконечных систем в задачах о напряженном состоянии анизотропной среды с эллиптическими отверстиями. Прикл. мех., т. 1, вып. 10, 1965.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
4. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Гостехиздат, М., 1950.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.