

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ ИЗГИБЕ БАЛОК И КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК,
 ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ЗА ПРЕДЕЛОМ
 УПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА

Рассматривается упруго-пластический изгиб балок и круглых пластинок, имеющих начальное однородное напряженно-деформированное состояние за пределом упругости материала.

В качестве физических соотношений принимаются соотношения теории малых упруго-пластических деформаций линейно упрочняющего несжимаемого материала [1].

Доказывается, что решение поставленной задачи для балки можно получить из решения задачи изгиба предварительно напряженной *линейно-упругой* балки путем замены в окончательных результатах обычной жесткости на изгиб некоторой постоянной — жесткостью балки при упруго-пластическом ее изгибе.

Для круглых пластинок решение осесимметричной задачи сводится к решению парной системы четырех нелинейных дифференциальных уравнений. Доказывается, что в предположении подобия упругих и упруго-пластических прогибов решение этой системы можно свести к решению одного трансцендентного уравнения относительно прогиба центра пластинки. Приведен численный пример.

Рассмотрим несжимаемый материал, для которого связь между интенсивностями касательных напряжений σ_i и деформаций сдвигов ε_i при активных деформациях выражается идеализированной ломаной

$$\begin{aligned} \sigma_i &= G\varepsilon_i \quad \text{при } \varepsilon_i < \varepsilon_i^*, \\ \sigma_i &= A + B\varepsilon_i \quad \text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_i^*, \end{aligned} \quad (I)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \\ \varepsilon_i &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \end{aligned} \quad (II)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные напряжения и удлинения, $G, B, A = \sigma_i^* (1 - B/G)$ и ε_i^* — постоянные материала (фиг. 1).

Пусть путем активного деформирования в теле, изготовленном из рассмотренного материала, создано однородное напряженно-деформированное состояние за пределом упругости $(\sigma_1^0, \dots, \sigma_3^0, \varepsilon_1^0, \dots, \varepsilon_3^0)$.

(Этому состоянию на фиг. 1 отвечает точка „с“). Допустим, что к такому предварительно напряженному телу накладывается статически возрастающая нагрузка иного характера. Тогда в некоторой его части происходит нагружение („сb“), а в остальной — разгрузка („cd“). Следовательно, вместо соотношений (I) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_i &= A + B\varepsilon_i \text{ при нагружении,} \\ \sigma_i &= A_1 + G\varepsilon_i \text{ при разгрузке,} \end{aligned} \quad (III)$$

где

$$A_1 = \sigma_i^0 - G\varepsilon_i^0 < 0. \quad (IV)$$

Пользуясь известными допущениями теории малых упруго-пластических деформаций [I] и ограничиваясь случаем, когда напряжение σ_3 пренебрежимо мало, из (III) получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^u &= \frac{2(A + B\varepsilon_i)}{\varepsilon_i} (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ \sigma_2^u &= \frac{2(A + B\varepsilon_i)}{\varepsilon_i} (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \text{при нагружении,}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^p &= \sigma_1^0 + 2G[2(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0) + \varepsilon_2 - \varepsilon_2^0] \\ \sigma_2^p &= \sigma_2^0 + 2G[\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0 + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^0)] \end{aligned} \right\} \text{при разгрузке.} \quad (V)$$

Здесь и в дальнейшем буквами u и p наверху будем отмечать величины, относящиеся к областям нагружки и разгрузки соответственно.

Аналогичные соотношения в случае одноосного напряженного состояния будут

$$\begin{aligned} \sigma_1^u &= \sigma_1^0 + 3B(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0), \\ \sigma_1^p &= \sigma_1^0 + 3G(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0). \end{aligned} \quad (VI)$$

1. Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения, в которой путем активного деформирования создано однородное напряженно-деформированное состояние за пределом упругости материала

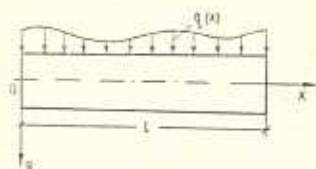
$$\begin{aligned} \sigma_1^0 &= \sigma_x^0, \quad \sigma_2^0 = \sigma_3^0 = 0, \quad (|\sigma_x^0| > \sqrt{3}\sigma_i^0), \\ \varepsilon_1^0 &= \varepsilon_x^0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon_x^0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Допустим, что к такой балке прикладывается статически возрастающая изгибающая нагрузка $q(x)$, действующая в одной из плоскостей симметрии ее поперечного сечения (xoy) (фиг. 2).

Вследствие изгиба в некоторой части балки Ω^u происходит нагружение, а в остальной Ω^p — разгрузка.

Исходя из сущности задачи, естественно ожидать, что поверхность раздела областей нагружения и разгрузки (нейтральная поверхность) будет симметричной относительно координатной оси oy .

Область нагружения Ω располагается по ту сторону поверхности раздела $h_0 = h_0(x)$, в которой изгиб вызывает дополнительное растяжение волокон балки. Что касается области разгрузки Ω^p , то



Фиг. 2.

она будет занимать всю оставшуюся часть. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \Omega^n &\sim -h \leq y < h_0(x) \\ \Omega^p &\sim h_0(x) < y \leq h \end{aligned} \right\} \text{при} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} > 0, \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega^n &\sim h_0(x) < y \leq h \\ \Omega^p &\sim -h \leq y < h_0(x) \end{aligned} \right\} \text{при} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} < 0. \quad (1.3)$$

Принимая гипотезу плоских сечений, для малых деформаций получим

$$\varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_x^0 - [y - h_0(x)] \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (1.4)$$

где w — перемещение оси балки вдоль oy .

С учетом (1.4), из (VI) для напряжений находим*

$$\begin{aligned} \sigma_x^n &= \sigma_x^0 - 3B(y - h_0) \frac{d^2 w}{dx^2}, & (y \in \Omega^n) \\ \sigma_x^p &= \sigma_x^0 - 3G(y - h_0) \frac{d^2 w}{dx^2}, & (y \in \Omega^p). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнения равновесия будут

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^n} \sigma_x^n dy + \int_{\Omega^p} \sigma_x^p dy &= 2h\sigma_x^0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[\int_{\Omega^n} \sigma_x^n y dy + \int_{\Omega^p} \sigma_x^p y dy \right] &= -q(x) - 2h\sigma_x^0 \frac{d^2 w}{dx^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из первого уравнения (1.6), с учетом (1.5), нетрудно найти

$$h_0(x) = \text{sign} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) h \frac{\sqrt{G} - \sqrt{B}}{\sqrt{G} + \sqrt{B}}. \quad (1.7)$$

Этот результат, как и следовало ожидать, совпадает с аналогичным результатом работы [2], относящейся к задаче изгиба цилиндрической оболочки, материал которой по-разному сопротивляется растяжению и сжатию.

Для изгибной жесткости балки

$$D = - \frac{M}{d^2 w / dx^2} = - \frac{1}{d^2 w / dx^2} \left[\int_{\Omega^n} \sigma_x^n y dy + \int_{\Omega^p} \sigma_x^p y dy \right] \quad (1.8)$$

* Касательное напряжение τ_{xy} пренебрегается.

с учетом (1.5) и (1.7), независимо от знака d^2w/dx^2 , получим

$$D = \frac{1}{2} \{ B [h_0^3 - h^2(3h_0 - 2h)] + G [h^2(3h_0 + 2h) - h_0^3] \}. \quad (1.9)$$

Второе уравнение (1.6) с учетом (1.8) принимает вид

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \frac{2h\sigma_x^0}{D} \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{D} q(x), \quad (1.10)$$

который отличается от разрешающего уравнения аналогичной задачи линейно-упругих балок лишь значением жесткости D .

Таким образом, решение поставленной упруго-пластической задачи можно получить из решения задачи изгиба предварительно напряженной линейно-упругой балки, при этом жесткость определяется по формуле (1.9).

2. Рассмотрим круглую пластинку радиуса R и толщины $2h$, имеющую начальное напряженно-деформированное однородное состояние за пределами упругости

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 = \sigma_\varphi^0 = p, \quad \sigma_t^0 = \frac{|p|}{\sqrt{3}} > \sigma_t^*, \\ \varepsilon_r^0 = \varepsilon_\varphi^0 = \varepsilon_0 = \frac{\text{sign } p}{2\sqrt{3}B} \left(\frac{|p|}{\sqrt{3}} - A \right), \\ \varepsilon_t^0 = 2\sqrt{3} |\varepsilon_0| > \varepsilon_t^*. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Допустим, к такой пластинке накладывается статически возрастающая изгибающая нагрузка. Для простоты ограничимся рассмотрением случая равномерно распределенной поперечной нагрузки q .

Из гипотезы плоских сечений следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \varepsilon_0 + (h_r - z) \chi_r, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_0 + (h_\varphi - z) \chi_\varphi, \\ \varepsilon_t = 2 \{ 3\varepsilon_0^2 + (h_r - z) [3\varepsilon_0 + \chi_r(h_r - z)] \chi_r + \\ + (h_\varphi - z) [3\varepsilon_0 + \chi_\varphi(h_\varphi - z)] \chi_\varphi + \chi_r \chi_\varphi (h_r - z)(h_\varphi - z) \}^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\chi_r = \frac{d^2w}{dr^2}, \quad \chi_\varphi = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad (2.3)$$

w — прогиб пластинки, z — вертикальная координата точек, рассчитываемая от срединной плоскости пластинки по направлению нагрузки q , $z = h_r$ и $z = h_\varphi$ — линии, через которые изгибные деформации сечений $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ по толщине меняют знак. Внутренние усилия (N_r , N_φ) и изгибающие моменты (M_r , M_φ) выражаются через напряжения по формулам

$$\begin{aligned}
 N_r &= \int_{\Omega^H} \sigma_r^H dz + \int_{\Omega^P} \sigma_r^P dz, \dots, \\
 M_r &= \int_{\Omega^H} \sigma_r^H z dz + \int_{\Omega^P} \sigma_r^P z dz, \dots.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Система уравнений равновесия

$$N_r = N_z = 2ph, \tag{2.5}$$

$$r \frac{dM_r}{dr} + M_r - M_z = -\frac{qr^2}{2} - 2phr \frac{dw}{dr} \tag{2.6}$$

с учетом (2.4) примет вид

$$\left. \begin{aligned}
 \int_{\Omega^H} \sigma_r^H dz + \int_{\Omega^P} \sigma_r^P dz &= 2ph, \\
 \int_{\Omega^H} \sigma_z^H dz + \int_{\Omega^P} \sigma_z^P dz &= 2ph,
 \end{aligned} \right\} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^H} \left(r \frac{d\sigma_r^H}{dr} + \sigma_r^H - \sigma_z^H \right) z dz + \int_{\Omega^P} \left(r \frac{d\sigma_r^P}{dr} + \sigma_r^P - \sigma_z^P \right) z dz = \\
 = -\frac{qr^2}{2} - 2phr \frac{dw}{dr}.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Уравнение поверхности раздела областей нагрузки и разгрузки $z = h_0(r)$ удовлетворяет условию

$$\varepsilon_i|_{z=h_0} = \varepsilon_r^0. \tag{2.9}$$

Присоединяя (2.9) к уравнениям (2.7) и (2.8), получим разрешающую систему задачи—систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно четырех функций h_r , h_z , h_0 и w .

Отметим, что в общем случае невозможно получить окончательные выражения уравнений (2.7) и (2.8) через неизвестные функции. Дело в том, что заранее не всегда известно расположение областей нагружения и разгрузки по отношению к поверхности их раздела.

В случае заземленной по контуру пластинки при $p > 0$ и $q(r) > 0$

$$\left. \begin{aligned}
 \Omega^H &\sim h_0 < z \leq h \\
 \Omega^P &\sim -h \leq z < h_0
 \end{aligned} \right\} 0 \leq r < r_1, \\
 \left. \begin{aligned}
 \Omega^H &\sim -h \leq z < h_0 \\
 \Omega^P &\sim h_0 < z \leq h
 \end{aligned} \right\} r_1 < r \leq R.
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

^{*)} Дифференцирование под знаком интеграла законно в силу непрерывности σ_r на поверхности раздела областей Ω^H и Ω^P .

Дело значительно усложняется при наличии промежуточных опор и произвольных нагрузок на плоскостях $z = \pm h$.

В рассмотренном выше частном случае можно получить разрешающую систему задачи в окончательном виде. Приведем три уравнения этой системы для круга $0 \leq r < r_1$

$$(z_i|_{z=h_0} = z_i^0),$$

$$(h_r - h_0) [3z_0 + (h_r - h_0)z_r] z_r + (h_z - h_0) [3z_0 + (h_z - h_0)z_z] z_z + z_r z_z (h_r - h_0) (h_z - h_0) = 0, \quad (2.11)$$

$$(N_r = 2ph),$$

$$p(h_0 - h) + 2G(h + h_0) \left[a_4 - 3z_0 + \frac{a_5}{2}(h_0 - h) \right] +$$

$$+ 2B(h - h_0) \left[a_4 + \frac{a_5}{2}(h + h_0) \right] +$$

$$+ \frac{Aa_5}{a_1} \left[\sqrt{a_1 h^2 + a_2 h + a_3} - \sqrt{3} z_0 \right] +$$

$$+ \frac{A(2a_1 a_4 - a_2 a_5)}{2a_1 \sqrt{a_1}} \ln \frac{2\sqrt{a_1(a_1 h^2 + a_2 h + a_3)} + 2a_1 h + a_2}{2\sqrt{3a_1 z_0} + 2a_1 h_0 + a_2} = 0, \quad (2.12)$$

$$(N_z = 2ph),$$

$$p(h_0 - h) + 2G(h + h_0) \left[a_6 - 3z_0 + \frac{a_7}{2}(h_0 - h) \right] +$$

$$+ 2B(h - h_0) \left[a_6 + \frac{a_7}{2}(h + h_0) \right] +$$

$$+ \frac{Aa_7}{a_1} \left[\sqrt{a_1 h^2 + a_2 h + a_3} - \sqrt{3} z_0 \right] +$$

$$+ \frac{A(2a_1 a_6 - a_2 a_7)}{2a_1 \sqrt{a_1}} \ln \frac{2\sqrt{a_1(a_1 h^2 + a_2 h + a_3)} + 2a_1 h + a_2}{2\sqrt{3a_1 z_0} + 2a_1 h_0 + a_2} = 0, \quad (2.13)$$

где

$$a_1 = z_r^2 + z_r z_z + z_z^2,$$

$$a_2 = -3z_0(z_r + z_z) - h_r(2z_r + z_z)z_r - h_z(2z_z + z_r)z_z,$$

$$a_3 = 3z_0(z_0 + h_r z_r + h_z z_z) + h_r^2 z_r^2 + h_r h_z z_r z_z + h_z^2 z_z^2,$$

$$a_4 = 3z_0 + 2h_r z_r + h_z z_z,$$

$$a_5 = -2z_r - z_z,$$

$$a_6 = 3z_0 + h_r z_r + 2h_z z_z,$$

$$a_7 = -z_r - 2z_z.$$

Четвертое уравнение разрешающей системы, соответствующее уравнению (2.8), более громоздкое и наряду с членами, встречающимися в (2.11)–(2.13), содержит также члены с производными от функций h_r , h_z и h_0 .

Разрешающая система задачи даже в рассмотренном простом случае весьма сложна.

Ниже, на примере заземленной пластинки, излагается сущность одного способа приближенного решения этой задачи.

3. Пусть заземленная по контуру $r=R$ круглая пластинка, имеющая начальное напряженно-деформированное состояние (2.1), подверглась воздействию равномерно распределенной поперечной нагрузки q . Избегая излишних усложнений, которые могут возникнуть при возможности потери устойчивости пластинки, ограничимся случаем $p > 0$.

Будем считать, что прогиб пластинки при упруго-пластическом ее изгибе пропорционален (подобен) прогибу, соответствующему линейно-упругому изгибу [3]

$$w(r) = Kw^*(r) = K \left[\frac{R}{i} \frac{I_0(\lambda r) - I_0(\lambda R)}{I_1(\lambda R)} - \frac{R^2 - r^2}{2} \right], \quad (3.1)$$

где $i = 1/2h\sqrt{3pG}$, I_n — бесселева функция чисто мнимого аргумента.

В силу (3.1) краевые условия

$$w|_{r=R} = \frac{dw}{dr}|_{r=R} = 0 \quad (3.2)$$

удовлетворяются автоматически.

Допущения характера (3.1) широко применяются в нелинейной механике [4] при приближенном решении задач по минимальным принципам. В нашем случае невозможно пользоваться минимальными принципами, поскольку отсутствуют подходящие аппроксимации для остальных неизвестных функций h_r , h_z и h_0 .

Рассмотрим центр пластинки $r=0$. В силу круговой симметрии, с учетом (2.10), для центра можно записать

$$\begin{aligned} (r=0), \\ \varepsilon_r = \varepsilon_z = \varepsilon < 0, \quad h_r = h_z = h_0, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_z = \varepsilon_0 + (h_0 - z)\varepsilon, \\ \varepsilon_z = 2\sqrt{3} |\varepsilon_0 + (h_0 - z)\varepsilon|, \\ \varepsilon_r = \varepsilon_z = \begin{cases} p + 6B(h_0 - z)\varepsilon, & h_0 \leq z \leq h \\ p + 6G(h_0 - z)\varepsilon, & -h \leq z \leq h_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Внеся значения напряжений из (3.3) в уравнения (2.7), которые при $r=0$ равносильны, получим

$$h_0|_{r=0} = -h \frac{\sqrt{G} - \sqrt{B}}{\sqrt{G} + \sqrt{B}}. \quad (3.4)$$

Значениями (3.3) и (3.4) удовлетворяются все уравнения разрешающей

системы (2.7), (2.8), (2.9) в точке $r=0$, причем уравнение изгиба (2.8) удовлетворяется автоматически при любом $\chi = K\chi^*$. Наша цель заключается в нахождении постоянного K .

Предварительно определим h'_r , h'_z и h''_r , h''_z — значения первых и вторых производных по r функций h_r и h_z в точке $r=0$.

Из очевидных условий

$$\left. \frac{dz_r}{dr} \right|_{r=0} = \left. \frac{dz_z}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (-h \leq z \leq h) \quad (3.5)$$

с учетом того обстоятельства, что в центре пластинки $\frac{dx_r}{dr} = \frac{dx_z}{dr} = 0$ и $h_r = h_z = h_0$, получим

$$\left. \begin{aligned} b_1 h'_r - b_2 h'_z &= 0 \\ b_2 h'_r - b_1 h'_z &= 0 \end{aligned} \right\} h_0 < z \leq h, \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} 2h'_r + h'_z &= 0 \\ h'_r + 2h'_z &= 0 \end{aligned} \right\} -h < z \leq h_0,$$

где

$$b_1 = A\sqrt{3} - 12B[\varepsilon_0 + (h_0 - z)\chi],$$

$$b_2 = A\sqrt{3} + 24B[\varepsilon_0 + (h_0 - z)\chi].$$

Из (3.6) следует

$$h'_r = h'_z = 0. \quad (3.7)$$

Этот результат можно получить и из условий

$$\left. \frac{dN_r}{dr} \right|_{r=0} = \left. \frac{dN_z}{dr} \right|_{r=0} = 0.$$

Если продифференцировать (2.7) два раза по r , полагая при этом $r=0$ и имея в виду (2.3), (3.1), (3.4) и (3.7), то для h'_r и h'_z получим следующие значения, выраженные через неизвестную постоянную K :

$$h'_r = -h'_z = \frac{Ax_z}{\chi^2} \frac{\chi(h-h_0) + \varepsilon_0 \ln \frac{\varepsilon_0 - \chi(h-h_0)}{\varepsilon_0}}{A \ln \frac{\varepsilon_0 - \chi(h-h_0)}{\varepsilon_0} - 2\sqrt{3}\chi[B(h-h_0) + G(h+h_0)]}, \quad (3.8)$$

где

$$\chi = K\chi^* = K \left(\frac{iR}{2I_1(iR)} - 1 \right), \quad \chi_z^* = K\chi_z^* = \frac{i^3 RK}{8I_1(iR)}. \quad (3.9)$$

Дифференцируя уравнение изгиба (2.8) два раза по r и полагая $r=0$, с учетом (3.7) относительно искомой постоянной K получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\begin{aligned}
& \frac{4A(\varepsilon_0 + h_0 x^* K)(\varepsilon_0 x_c^{**} - x^{*2} h_r^* K)}{\sqrt{3} x^{*3} K^2} \ln \frac{\varepsilon_0 - (h - h_0) K x^*}{\varepsilon_0} + \\
& + \frac{2A(h - h_0)}{\sqrt{3} x^{*2} K} \{x_c^{**} [2\varepsilon_0 + (h + h_0) x^* K] - 2x^{*2} h_r^* K\} - \\
& - \frac{4K}{3} \{3x^* (h^2 - h_0^2) (G - B) h_r^* + 4x^{**} [B(2h^3 - 3h^2 h_0 + h_0^3) + \\
& + G(2h^3 + 3h^2 h_0 - h_0^3)]\} = -q - 4phx^* K, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

где

$$x^* = \frac{iR}{2I_1(iR)} - 1, \quad x_c^{**} = \frac{i^3 R}{8I_1(iR)}, \quad (3.11)$$

а h_0 , h_r^* определяются из (3.4) и (3.8).

После определения K вычисление остальных величин не представляет принципиальной трудности.

Таким образом, допущение (3.1) о подобии прогибов упругой и упруго-пластической пластинок позволило свести решение поставленной задачи к решению одного трансцендентного уравнения.

4. Рассмотрим следующий иллюстрационный числовой пример:

$$A = 900 \text{ кг/см}^2, \quad B = 6 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad G = 10 B,$$

$$\sigma_i^* = 1000 \text{ кг/см}^2, \quad \varepsilon_i^* = 166.7 \cdot 10^{-5}, \quad R = 100 \text{ см}, \quad h = 1.5 \text{ см},$$

$$\sigma_r^0 = \sigma_z^0 = p = 1775 \text{ кг/см}^2, \quad \varepsilon_r^0 = \varepsilon_z^0 = \varepsilon_0 = 60 \cdot 10^{-5}, \quad (4.1)$$

$$\sigma_i^0 = 1024.6 \text{ кг/см}^2 > \sigma_i^*, \quad \varepsilon_i^0 = 207.6 \cdot 10^{-5} > \varepsilon_i^*.$$

Из (3.4) и (3.10), с учетом (3.8), (3.9) и (4.1), для центра пластинки получим

$$h_r = h_c = h_0 = -0.7792 \text{ см}, \quad (4.2)$$

$$(60 + 0.50674K_1)(3196.205 C_1 K_1 - 39.09634) \frac{C_2}{K_1^2} +$$

$$+ (23.07535 K_1 - 4737.29) C_1 + \frac{57.9468}{K_1} - 0.077866 K_1 + q - 0.22634 = 0, \quad (4.3)$$

где

$$K_1 = 10^5 K, \quad C_1 = \frac{11.00892 C_2 - 0.271957 K_1}{900 C_2 K_1 + 12.82257 K_1^2}, \quad C_2 = \ln(1 + 0.024703 K_1).$$

В нижеприведенной таблице представлены результаты вычислений корней трансцендентного уравнения (4.3).

$q, \text{ кг/см}^2$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$K_1, 1/\text{см}$	12.00976	18.08402	24.19308	30.33138	36.49454	42.67903	48.88204

Вычисления проводились в вычислительной лаборатории Института математики и механики АН АрмССР на машине „Наири“.

Институт математики и
механики АН Армянской ССР

Поступила 17 V 1956

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՅԱՆ

ՆՅՈՒԹԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻՑ ԱՅՆ ԿՈՂՄ ՆԱԽԱՊԵՍ ԼԱՐՎԱԾ
ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ԵՎ ԿՂՐ ՍԱԼԵՐԻ ՄՈՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է առաձգականության սահմանը դերազանցող նախնական համասեռ լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակ ունեցող հեծանների և կլոր սալերի առաձգա-պլաստիկական ծաման խնդիրը: Որպես ֆիզիկական առնչություններ ընդունվում են փոքր առաձգա-պլաստիկական տեսության հավասարումները՝ գծայնորեն ամրացող անսկզմելի նյութի համար [1]:

Ապացուցվում է, որ հեծանի համար դրված խնդրի լուծումը կարելի է ստանալ նախապես լարված գծային առաձգական հեծանի ծաման խնդրի լուծումից՝ նրանում ծաման ստվորական կոշտությունը փոխարինելով հեծանի առաձգա-պլաստիկական (1.9) կոշտությամբ:

Կլոր սալերի համար առանցքասիմետրիկ խնդիրը բերվում է շորս անհալտների նկատմամբ ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների զույգ սխեմայի:

Ապացուցվում է, որ սալի առաձգական և առաձգա-պլաստիկական ճկվածքների նմանությունը ընդունելությամբ, ալլ սխեմայում կարելի է բերել սալի կենտրոնի ճկվածքի նկատմամբ մեկ տրանսցենդենտ հավասարման: Բերված է թվային օրինակ:

R. M. KIRAKOSIAN

ON THE BENDING OF BEAMS AND ROUND PLATES,
PRELIMINARY STRAINED BEYOND THE ELASTIC
LIMIT OF MATERIALS

S u m m a r y

In this paper elastic-plastic bending of beams and round plates, preliminary strained beyond elastic limit of materials is considered.

It is proved that the solution of the problem of the beam may be received from the solution of linear-elastic beam.

The solution of the problem for round plates is reduced to the solution of transcendent equation.

The numerical example is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ильющин А. А.* Пластичность, Гостехиздат, М.-Л., 1948.
2. *Амбарцумян С. А.* Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию. Изв. АН СССР, Механика, № 4, 1965.
3. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.
4. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. Изд. иностр. лит., М., 1961.