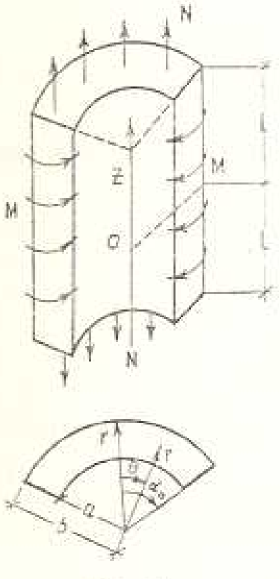
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 2, 1967 Механика

М. А. ЗАДОЯН

ПОЛЗУЧЕСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ, ПОДВЕРГНУТОГО ПОПЕРЕЧНОМУ ИЗГИБУ И ПРОДОЛЬНОМУ РАСТЯЖЕНИЮ

Рассматривается ползучесть цилиндрического слоя, находящегося под совместным воздействием равномерно распределенных изгибающих моментов M, действующих в осевых сечениях $\theta = \pm\alpha$, и растягивающих продольных сил N, приложенных на торцах $z = \pm l$ (фиг. 1). В первом параграфе полуобратным способом дано решение задачи для случая установившейся ползучести и степенного закона упрочнения [1]. Во втором параграфе получено решение задачи для неустановившейся, а именно, наследственной теории ползучести [2]. Аналогичная задача для идеально-жестко-пластического несжимаемого материала решена в нашей работе [3].



Фиг. 1.

§ 1. Установившаяся ползучесть. Общие уравнения теории установившейся ползучести в цилиндрических координатах имеют вид:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+2\frac{\tau_{r\theta}}{r}=0, \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0;$$

соотношения между компонентами напряжений и скоростями деформаций [1]

$$\sigma_r-\sigma=f(\xi_i)\,\xi_r, \qquad \tau_{r\theta}=f(\xi_i)\,\eta_{r\theta}, \quad (r,\ \theta,\ z), \qquad (1.2)$$

зависимость между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций

$$\sigma_i=f(\xi_i)\,\xi_i, \qquad (1.3)$$

где

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{rz}^2)},$$

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\xi_r - \xi_\theta)^2 + (\xi_\theta - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_r)^2 + 6(\eta_{r\theta}^2 + \eta_{\theta z}^2 + \eta_{rz}^2)}; \tag{1.4}$$

связь между компонентами скоростей деформаций

$$\xi_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \xi_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \xi_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$2\eta_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad 2\eta_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad 2\eta_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}. \tag{1.5}$$

1°. Полуобратным способом, примененным в работе [3], скорости деформаций и скорости ищем в форме

$$u = -(A + B) r - \frac{C}{r}, \quad v = (2A + B) r\theta, \quad w = Bz, \tag{1.6}$$

$$\xi_r = -A - B + \frac{C}{r^2}, \quad \xi_\theta = A - \frac{C}{r^2}, \quad \xi_z = B, \tag{1.7}$$

а для напряжений принимаем

$$\sigma_r = D - \int_a^r (2\xi_\theta + \xi_z) f(\xi_i) \frac{dr}{r}, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + (2\xi_\theta + \xi_z) f(\xi_i),$$

$$\sigma_z = \sigma_r + (\xi_\theta + 2\xi_z) f(\xi_i), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0. \tag{1.8}$$

Здесь A, B, C, D — произвольные постоянные. Выражения (1.6)—(1.8) удовлетворяют всем уравнениям ползучести (1.1)—(1.5).

Вводя обозначения

$$\alpha = A^2 + AB + B^2, \quad \beta = (2A + B) C, \quad \gamma = C^2, \tag{1.9}$$

будем иметь

$$\xi_i = \sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}}. \tag{1.10}$$

Подставляя (1.7), (1.10) в (1.8) и учитывая, что внутренняя цилиндрическая поверхность слоя свободна от напряжений, получим

$$\sigma_r = \int_{a^2/b^2}^{r^2/b^2} \left(A + \frac{1}{2}B - \frac{C}{b^2 x}\right) f\left(\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{b^2 x} + \frac{\gamma}{b^4 x^2}}\right) \frac{dx}{x}, \tag{1.11}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \left(2A + B - \frac{2C}{r^2}\right) f\left(\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}}\right), \tag{1.12}$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \left(A + 2B - \frac{c}{r^2}\right) f\left(\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}}\right). \tag{1.13}$$

Поскольку свободна от напряжений также и внешняя поверхность $r=b$, то

$$(2A+B)\,b^2 I_1 - 2C I_2 = 0, \tag{1.14}$$

где обозначено

$$I_1 = \int_{a^2/b^2}^{1} f[\xi_i(b\sqrt{x})]\,\frac{dx}{x}, \qquad I_2 = \int_{a^2/b^2}^{1} f[\xi_i(b\sqrt{x})]\,\frac{dx}{x^2}. \tag{1.15}$$

Имеем также условия

$$M = \int_a^b \sigma_\theta r\,dr, \qquad N = \int_a^b \sigma_z r\,dr, \tag{1.16}$$

где M—изгибающий момент на единицу длины, а N—растягивающая сила, отнесенная к единице угла. Подставляя σ_θ и σ_z из (1.12) и (1.13) в (1.16), после некоторых преобразований получим

$$(2A+B)\,b^2 I_0 - 2C I_1 = 4M, \qquad 3b^2 I_0 B = 4N, \tag{1.17}$$

где

$$I_0 = \int_{a^2/b^2}^{1} f[\xi_i(b\sqrt{x})]\,dx. \tag{1.18}$$

Величины A, B и C можно определить различными приближенными методами.

Задаваясь различными значениями A, B и C, из (1.14) и (1.17) определяем соответствующие им значения M и N.

2°. В случае, когда на площадках $\theta = \pm\alpha$ и $z = \pm l$ заданы соответствующие перемещения

$$v\big|_{\theta=\alpha} = \omega r, \quad w\big|_{z=l} = w_0, \tag{1.19}$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\alpha} - \frac{w_0}{l}\right), \qquad B = \frac{w_0}{l}, \tag{1.20}$$

задача сводится к определению единственного неизвестного постоянного C. Подставляя (1.20) в уравнение (1.14), будем иметь

$$C = \frac{\omega b^2}{2\alpha}\,\frac{I_1(C)}{I_2(C)}. \tag{1.21}$$

Из этого уравнения постоянную C можно определить численным методом или методом последовательных приближений. Однако, легко получить простые двухсторонние оценки для C. Учитывая знакопостоянство подинтегральных величин (1.15) и применяя теорему о среднем, находим

$$I_2 = \frac{b^2}{r_*^2} I_1, \qquad C = \frac{\omega r_*^2}{2\alpha}, \tag{1.22}$$

где r_*—некоторое неизвестное значение r, находящееся между a и b. Обозначая через $C_в$ и $C_н$ соответственно верхнее и нижнее значения C, положим

$$C \approx \frac{C_n + C_B}{2} = \frac{\omega}{2\pi}(a^2 + b^2). \tag{1.23}$$

Абсолютная погрешность будет

$$\left|\frac{C - C_B}{C}\right| = \left|\frac{C - C_n}{C}\right| = \frac{\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)\delta}{1 + \delta + \frac{1}{2}\delta^2} \approx \delta, \tag{1.24}$$

где через δ обозначено отношение толщины слоя к внешнему радиусу: $\delta = (b - a):b$.

3°. В случае, когда заданы M и N, неизвестные A, B, C из (1.14) и (1.17) выразим через M и N

$$A = \frac{2MI_2}{b^2(I_0 I_2 - I_1^2)} - \frac{2N}{3b^2 I_0}, \quad B = \frac{4N}{3b^2 I_0}, \quad C = \frac{2MI_1}{I_0 I_2 - I_1^2}. \tag{1.25}$$

Принимая δ малым и разлагая I_0, I_1, I_2 в ряд по параметру δ, получим

$$I_0 \approx 2f_0\delta + (-f_0 + f_0')\delta^2 + (-2f_0' + f_0'')\frac{\delta^3}{3} + \cdots, \tag{1.26}$$

$$I_1 \approx 2f_0\delta + (f_0 + f_0')\delta^2 + (2f_0 + 2f_0' + f_0'')\frac{\delta^3}{3} + \cdots, \tag{1.27}$$

$$I_2 \approx 2f_0\delta + (3f_0 + f_0')\delta^2 + (12f_0 + bf_0' + f_0'')\frac{\delta^3}{3} + \cdots, \tag{1.28}$$

где

$$f_0 = f[\xi_i(b)], \quad f_0' = \left.\frac{\partial f\{\xi_i[b(1-\delta)]\}}{\partial\delta}\right|_{\delta=0}, \quad f_0'' = \left.\frac{\partial^2 f\{\xi_i[b(1-\delta)]\}}{\partial\delta^2}\right|_{\delta=0}. \tag{1.29}$$

Тогда

$$I_2 - I_1 \approx 2f_0\delta^2, \quad I_0 I_2 - I_1^2 \approx \frac{4}{3}f_0^2\delta^4. \tag{1.30}$$

Следовательно,

$$\xi_i(b) = \sqrt{\frac{4M^2(I_2 - I_1)^2}{b^2(I_0 I_2 - I_1^2)^2} + \frac{4N^2}{3b^2 I_0^2}} \approx \frac{1}{f_0}\sqrt{\frac{9M^2}{b^4\delta^4} + \frac{N^2}{3b^4\delta^2}}. \tag{1.31}$$

Примем степенной закон зависимости между σ_i и ξ_i, т. е. $\sigma_i = k\xi_i^m$. Тогда

$$f(\xi_i) = k\left[\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}}\right]^{m-1}. \tag{1.32}$$

Отсюда, принимая $r = b$ и учитывая (1.31), для f_0 находим

$$f_0 = k^{\frac{1}{m}}\left[\sqrt{\frac{9M^2}{b^4\delta^4} + \frac{N^2}{3b^4\delta^2}}\right]^{\frac{m-1}{m}}. \tag{1.33}$$

Таким образом, для искомых постоянных получаем приближенные значения

$$A \approx \left(\frac{3M}{b^2\delta^3} - \frac{1}{3}\,\frac{N}{b^2\delta} \right) \frac{1}{f_0}, \quad B \approx \frac{2}{3}\,\frac{N}{b^2\delta f_0}, \quad C = \frac{3M}{\delta^3 f_0}. \qquad (1.34)$$

Существо решения задачи не меняется, если в осевых сечениях приложены также растягивающие силы, а на цилиндрических поверхностях—радиальные давления.

§ 2. Неустановившаяся ползучесть. Теперь рассмотрим случай, когда материал слоя подчиняется законам наследственной теории ползучести Ю. Н. Работнова [2]. Соотношение между компонентами напряжений и деформаций в этом случае имеют вид

$$\sigma_r - \sigma = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\,\varepsilon_r, \quad \tau_{r\theta} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\,\gamma_{r\theta}, \quad (r, \theta, z), \qquad (2.1)$$

$$\varphi(\varepsilon_i) = \sigma_i + \int_0^t \sigma_i K(t, \tau)\, d\tau, \qquad (2.2)$$

Выражения интенсивности σ_i и ε_i, а также компоненты деформации $\varepsilon_r, \cdots, \gamma_{r\theta}, \cdots$ даются соотношениями, аналогичными (1.4)—(1.5), с тем отличием, что в них $\xi_r, \cdots, \eta_{r\theta} \cdots$ заменяются через $\varepsilon_r, \cdots, \gamma_{r\theta}, \cdots$.

1°. Компоненты перемещения и деформаций, как и в § 1, ищем в форме

$$u = -[A(t) + B(t)]\, r - \frac{C(t)}{r}, \qquad v = [2A(t) + B(t)]\, r\theta, \qquad w = B(t)\, z,$$

$$\varepsilon_r = -A(t) - B(t) + \frac{C(t)}{r^2}, \qquad \varepsilon_\theta = A(t) - \frac{C(t)}{r^2}, \qquad \varepsilon_z = B(t), \qquad (2.3)$$

$$\gamma_{rz} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0,$$

где A, B, C и D— произвольные функции от t.

Вводя обозначения

$$f_*(\varepsilon_i) = \frac{1}{\varepsilon_i} \left[\varphi(\varepsilon_i) + \int_0^t \varphi(\varepsilon_i)\, R(t, \tau)\, d\tau \right], \qquad (2.4)$$

где $R(t, \tau)$— резольвента ядра $K(t, \tau)$, компоненты напряжения представим в виде

$$\sigma_r = D(t) + \int\limits_a^r (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) f_*(\varepsilon_i)\frac{dr}{r}, \qquad \sigma_\theta = \sigma_r + (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) f_*(\varepsilon_i),$$

$$\sigma_z = \sigma_r + (\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_z) f_*(\varepsilon_i), \qquad \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0. \tag{2.5}$$

Выражения (2.3) и (2.5) удовлетворяют всем уравнениям принятой теории ползучести.

В нашей задаче имеем

$$\varepsilon_i(r, t) = \sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{r^2} + \frac{\gamma(t)}{r^4}}, \tag{2.6}$$

где α, β и γ определяются аналогичными (1.9) выражениями.

Учитывая, что $\sigma_r = 0$ при $r = a$, компоненты напряжения представим в виде

$$\sigma_r = \int\limits_{a^2/b^2}^{r^2/b^2} \left[A(t) + \frac{1}{2}B(t) - \frac{C(t)}{b^2 x}\right] f_*\left(\sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{b^2 x} + \frac{\gamma(t)}{b^4 x^2}}\right)\frac{dx}{x}, \tag{2.7}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \left[2A(t) + B(t) - \frac{2C(t)}{r^2}\right] f_*\left(\sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{r^2} + \frac{\gamma(t)}{r^4}}\right), \tag{2.8}$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \left[A(t) + 2B(t) - \frac{C(t)}{r^2}\right] f_*\left(\sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{r^2} + \frac{\gamma(t)}{r^4}}\right). \tag{2.9}$$

Поскольку внешняя цилиндрическая поверхность слоя также свободна от напряжений, то

$$[2A(t) + B(t)]\, b^2 I_1(t) - 2C(t)\, I_2(t) = 0, \tag{2.10}$$

где

$$I_1(t) = \int\limits_{a^2/b^2}^{1} f_*[\varepsilon_i(b\sqrt{x}, t)]\frac{dx}{x}, \qquad I_2(t) = \int\limits_{a^2/b^2}^{1} f_*[\varepsilon_i(b\sqrt{x}, t)]\frac{dx}{x^2}. \tag{2.11}$$

Используя еще условия

$$M(t) = \int\limits_a^b \sigma_\theta(r, t)\, r dr, \qquad N(t) = \int\limits_a^b \sigma_z(r, t)\, r dr, \tag{2.12}$$

где $M(t)$ — изгибающий момент на единицу длины, а $N(t)$ — растягивающая сила на единицу угла, получим

$$M(t) = \frac{1}{4}[2A(t) + B(t)]\, b^2 I(t) - \frac{1}{2} C(t)\, I_1(t),$$

$$N(t) = \frac{3}{4} B(t)\, b^2 I(t), \tag{2.13}$$

где

$$I(t)=\int\limits_{a^2/b^2}^{1} f_*[\varepsilon_i(b\sqrt{x},\ t)]\,dx. \tag{2.14}$$

2°. Рассмотрим релаксационную задачу. Пусть в момент $t=0$ на площадках $\theta=\pm\alpha$ и $z=\pm l$ сообщены нормальные перемещения

$$v\big|_{\theta=\alpha}=\omega r,\qquad w\big|_{z=l}=w_0, \tag{2.15}$$

которые остаются постоянными во времени.

Требуется определить, как будут меняться во времени $M(t)$, $N(t)$ и $u(r,\ t)$. Из (2.3) и (2.15) будем иметь

$$A(t)=A_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\alpha}-\frac{w_0}{l}\right),\qquad B(t)=B_0=\frac{w_0}{l}. \tag{2.16}$$

Для $C(t)$ из (2.10) и (2.16) имеем

$$C(t)=\frac{\omega b^2}{2\alpha}\,\frac{I_1[C(t),\ t]}{I_2[C(t),\ t]}. \tag{2.17}$$

Как и в первом параграфе, принимая теорему о среднем, получим

$$I_2(t)=\frac{b^2}{r_*^2(t)}\,I_1(t),\qquad C(t)=\frac{\omega r_*^2(t)}{2\alpha}, \tag{2.18}$$

где $r_*(t)$ — некоторое значение r, находящееся между a и b. Отсюда, оставляя обозначения, принятые в § 1, напишем

$$C(t)\approx\frac{C_в+C_н}{2}=\frac{\omega}{4\alpha}(a^2+b^2). \tag{2.19}$$

Погрешность, как и в (1.24), будет $\approx\delta$. Отсюда заключаем, что, по крайней мере, при малой толщине слоя перемещения во времени практически не меняются. Имея значения A, B и C, легко определить $M(t)$, $N(t)$ и компоненты напряжений. Заметим, что

$$f_*(\varepsilon_i)=\frac{\varphi(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i}\,\chi(t),\qquad\qquad \chi(t)=1+\int\limits_0^t R(t,\ \tau)\,d\tau. \tag{2.20}$$

Тогда из (1.11)—(1.13) имеем

$$\sigma_r=\sigma_r^0\chi(t),\quad \sigma_\theta=\sigma_\theta^0\chi(t),\quad \sigma_z=\sigma_z^0\chi(t), \tag{2.21}$$

где нулевыми индексами обозначены соответствующие компоненты напряжений в момент $t=0$

$$\sigma_r^0=\int\limits_{a^2/b^2}^{1}\left(A_0+\frac{1}{2}B_0-\frac{C_0}{b^2x}\right)\frac{\varphi[\varepsilon_i^0(b\sqrt{x})]}{\varepsilon_i^0(b\sqrt{x})}\,\frac{dx}{x}, \tag{2.22}$$

$$\sigma_\theta^0=\sigma_r^0+\left(2A_0+B_0-\frac{2C_0}{r^2}\right)\frac{\varphi(\varepsilon_i^0)}{\varepsilon_i^0}, \tag{2.23}$$

$$\sigma_z^0 = \sigma_r^0 + \left(A_0 + 2B_0 - \frac{C_0}{r^2}\right)\frac{\varphi(\varepsilon_i^0)}{\varepsilon_i^0}, \tag{2.24}$$

где

$$\varepsilon_i^0(r) = \sqrt{\alpha_0 - \frac{\beta_0}{r^2} + \frac{\gamma_0}{r^4}}. \tag{2.25}$$

Величины α_0, β_0 и γ_0 определяются согласно (1.9), где вместо A, B и C следует поставить A_0, B_0 и C_0 по (2.16).

Для изгибающего момента и продольной силы имеем

$$M(t) = M_0\chi(t), \quad N(t) = N_0\chi(t), \tag{2.26}$$

причем

$$M_0 = \frac{1}{4}(2A_0 + B_0)\,b^2 I_0^0 - \frac{1}{2}C_0 I_1^0, \qquad N_0 = \frac{3}{4}B_0 b^2 I_0^0, \tag{2.27}$$

$$I_0^0 = \int\limits_{a^2/b^2}^{1} \frac{\varphi[\varepsilon_i^0(b\sqrt{x})]}{\varepsilon_i^0(b\sqrt{x})}dx, \qquad I_1^0 = \int\limits_{a^2/b^2}^{1} \frac{\varphi[\varepsilon_i^0(b\sqrt{x})]}{\varepsilon_i^0(b\sqrt{x})}\frac{dx}{x}. \tag{2.28}$$

Для реальных материалов $\chi(t)$ — убывающая функция по t. Формулы (2.20), (2.21) и (2.26) выражают закон релаксации напряжений и внешних сил во времени вследствие ползучести материала.

3°. В случае, когда заданными являются внешние силы $M(t)$ и $N(t)$, решением системы уравнений (1.14), (1.17) относительно A, B и C является (1.25), в котором M, N, I_0, I_1 и I_2 будут функциями от t. Разлагая интегралы (2.11) и (2.14) в ряд по малому параметру δ, получим сходные с (1.26)—(1.28) выражения, причем вместо (1.29) будем иметь

$$f_0(t) = f_*[\varepsilon_i(b, t)], \quad f_0'(t) = \left.\frac{\partial f_*\{\varepsilon_i[b(1-\delta), t]\}}{\partial\delta}\right|_{\delta=0},$$

$$f_0''(t) = \left.\frac{\partial^2 f_*\{\varepsilon_i[b(1-\delta), t]\}}{\partial\delta^2}\right|_{\delta=0}. \tag{2.29}$$

Аналогичным образом находим

$$I_2(t) - I_1(t) \approx 2f_0(t)\,\delta^2, \qquad I_0(t)\,I_2(t) - I_1^2(t) \approx \frac{4}{3}f_0^2(t)\,\delta^4. \tag{2.30}$$

Тогда

$$\varepsilon_i(b, t) \approx \frac{S(t)}{f_0(t)}, \qquad S(t) = \sqrt{\frac{9M^2(t)}{b^4\delta^4} + \frac{N^2(t)}{3b^4\delta^2}}. \tag{2.31}$$

Для функции φ примем степенной закон: $\varphi = k\varepsilon_i^m$. Тогда

$$f_*[\varepsilon_i(r, t)] = \frac{k}{\varepsilon_i(r, t)}\left[\varepsilon_i^m(r, t) + \int\limits_0^t \varepsilon_i^m(r, \tau)\,R(t, \tau)\,d\tau\right]. \tag{2.32}$$

Принимая в соотношении (2.32) $r = b$ и подставляя в него (2.31), получим интегральное уравнение

$$k\frac{S^m(t)}{f_0^m(t)} + \int_0^t k\frac{S^m(\tau)}{f_0^m(\tau)}R(t, \tau)\,d\tau = S(t). \tag{2.33}$$

Отсюда

$$f_0(t) = \frac{k^{\frac{1}{m}} S(t)}{\left[S(t) + \int_0^t S(\tau)K(t, \tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{m}}}. \tag{2.34}$$

Таким образом, приближенными значениями A, B и C будут

$$A(t) \approx \left[\frac{3M(t)}{b^2\delta^3} - \frac{1}{3}\frac{N(t)}{b^2\delta}\right]\frac{1}{f_0(t)},$$

$$B(t) \approx \frac{2}{3}\frac{N(t)}{b^2\delta f_0(t)}, \quad C(t) \approx \frac{3M(t)}{\delta^3 f_0(t)}. \tag{2.35}$$

В частном случае, когда $M(t) = M_0$, $N(t) = N_0$, будем иметь

$$A(t) = A_0\frac{f_0(0)}{f_0(t)}, \quad B(t) = B_0\frac{f_0(0)}{f_0(t)}, \quad C(t) = C_0\frac{f_0(0)}{f_0(t)}, \tag{2.36}$$

где через A_0, B_0, C_0 и $f_0(0)$ обозначены значения соответствующих величин при $t = 0$

$$A_0 = \left(\frac{3M_0}{b^2\delta^3} - \frac{1}{3}\frac{N_0}{b^2\delta}\right)\frac{1}{f_0(0)}, \quad B = \frac{2}{3}\frac{N_0}{b^2\delta f_0(0)}, \quad C_0 = \frac{3M_0}{\delta^3 f_0(0)}, \tag{2.37}$$

$$f_0(0) = k^{\frac{1}{m}}\left(\sqrt{\frac{9M_0^2}{b^4\delta^6} + \frac{N_0^2}{9b^4\delta^2}}\right)^{\frac{m-1}{m}}. \tag{2.38}$$

При помощи соотношений (2.34) и (2.38) находим закон возрастания деформаций во времени

$$\frac{f_0(0)}{f_0(t)} = \left[1 + \int_0^t K(t, \tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{m}}.$$

Принимая в (2.7)—(2.9) $\varphi = k\varepsilon_i^m$ и замечая, что

$$\frac{f_0^m(0)}{f_0^m(t)} + \int_0^t \frac{f_0^m(0)}{f_0^m(\tau)}R(t, \tau)\,d\tau = 1,$$

для компонентов напряжений получим

$$\sigma_r=\sigma_r^0=k\int\limits_{a^2/b^2}^{\rho}\left(A_0+\frac{1}{2}B_0-\frac{C_0}{b^2x}\right)\left(\alpha_0-\frac{\beta_0}{b^2x}+\frac{\gamma_0}{b^4x^2}\right)^{\frac{m-1}{2}}\frac{dx}{x},$$

$$\sigma_\theta=\sigma_\theta^0=\sigma_r^0+k\left(2A_0+B_0-\frac{2C_0}{r^2}\right)\left(\alpha_0-\frac{\beta_0}{r^2}+\frac{\gamma_0}{r^4}\right)^{\frac{m-1}{2}},$$

$$\sigma_z=\sigma_z^0=\sigma_r^0+k\left(A_0+2B_0-\frac{C_0}{r^2}\right)\left(\alpha_0-\frac{\beta_0}{r^2}+\frac{\gamma_0}{r^4}\right)^{\frac{m-1}{2}},$$

т. е. при постоянных внешних силах напряжения в слое во времени остаются неизменными.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 VII 1966

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ՍՈՂՔԸ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ԾՌՄԱՆ ԵՎ ԸՆԴԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՁԳՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հիմնվելով սողքի հավասարումների ճշգրիտ լուծման վրա, ուսումնասիրված է գլանային շերտի կայունացված և ոչ-կայունացված սողքը՝ ընդլայնական ծռման և ընդերկայնական ձգման համատեղ ազդեցության ժամանակ: Եզրային պայմանները բավարարված է Սեն-Վենանի իմաստով: Սողքի խնդրի դեպքում անհայտ գործակիցները որոշվում են մոտավոր եղանակով, իսկ ռելակսացիայի դեպքում այդ գործակիցները դառնում են հայտնի մեծություններ:

Ուսումնասիրված է նաև բարակապատ շերտի դեպքը, որի համար ստացվում են պարզ բանաձևեր:

M. A. ZADOYAN

CREEP OF THE CYLINDRICAL SHEET DURING BENDING AND LONGITUDINAL EXTENSION

S u m m a r y

Relying on the exact solution of equations of creep, the creep of the cylindrical sheet during combined bending and longitudinal extension is investigated. Boundary conditions in Sen-Venan's sense are satisfied.

In the case of creep the coefficients are determined approximately.

For the case of a thin-walled cylinder simple results are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
3. *Задоян М. А.* О некотором частном решении уравнения теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 5, 1964.
4. *Задоян М. А.* О двух задачах теории идеальной пластичности. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 17, № 6, 1964.