

К. С. ЧОБАНЯН, Р. Е. МКРТЧЯН

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНЕЧНЫХ УПРУГИХ  
 ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ РАСТЯЖЕНИЯ, РАЗДУВАНИЯ И  
 КРУЧЕНИЯ СОСТАВНЫХ ТРУБ

Задачи больших упругих деформаций для однородных труб с помощью функции энергии деформации общего вида рассматривались в работах [1, 2].

В настоящей работе эти задачи рассматриваются для трубы, составленной из нескольких надетых друг на друга и спаянных по боковым поверхностям однородных круглых труб из различных упругих материалов.

1. Пусть круглая цилиндрическая труба, состоящая из  $(n-1)$  однородных, изотропных и несжимаемых слоев, в недеформированном состоянии имеет длину  $l$ . На фиг. 1а показаны поперечные размеры трубы до деформации.

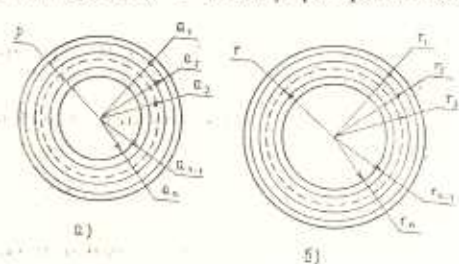
Рассмотрим случай, когда труба испытывает одновременно следующие деформации: а) простое растяжение в направлении оси трубы с коэффициентом растяжения  $\lambda$ ,

б) однородное раздувание, при котором линейные элементы, параллельные оси трубы, не меняют направление и величину длины, а радиусы  $a_1, a_2, \dots, a_n$  после деформации становятся  $r_1 = \mu_1 a_1, r_2 = \mu_2 a_2, \dots, r_n = \mu_n a_n$  (фиг. 1б), в) кручение с углом закручивания  $\psi$  на единицу длины трубы. Все эти деформации оставляют плоские сечения составной трубы плоскими.

Для компонентов контрвариантного тензора напряжений имеем [2]

$$\begin{aligned} \tau_{(k)}^{11} &= H_{(k)} - L_{(k)}(r), \\ \tau_{(k)}^{22} &= H_{(k)} - L_{(k)}(r) + \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda} + \psi^2 \lambda^2 r^2 \right) \Phi_{(k)} + \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right) \Psi_{(k)}, \\ \tau_{(k)}^{33} &= H_{(k)} - L_{(k)}(r) + \left( \lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi_{(k)} + \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \psi^2 r^2 Q^2 \right) \Psi_{(k)}, \\ \tau_{(k)}^{23} &= \psi \lambda^2 \Phi_{(k)} + \psi Q^2 \Psi_{(k)}, \\ \tau_{(k)}^{31} &= \tau_{(k)}^{12} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Индекс  $(k)$  снизу показывает номер слоя трубы.



Фиг. 1.

Здесь  $L_{(k)}(r)$  определяется соотношением

$$L_{(k)}(r) = \int_{r_k}^r \left( \frac{Q^2}{k^2} - \frac{1}{Q^2} - \rho^{2k} r^2 \right) \Phi_{(k)} + \left( Q^2 - \frac{k^2}{Q^2} \right) \Psi_{(k)} \frac{dr}{r}, \quad (1.2)$$

где  $r_k \leq r \leq r_{k+1}$ .

Для  $\Phi_{(k)}$  и  $\Psi_{(k)}$  имеем

$$\Phi_{(k)} = 2 \frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_1}, \quad \Psi_{(k)} = 2 \frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_2}, \quad (1.3)$$

где  $W_{(k)}$  — функция энергии деформации материала  $k$ -го слоя, а  $I_1$  и  $I_2$  — инварианты деформации,  $H_{(k)}$  — постоянные,  $Q = \frac{\rho}{r}$ .

Из условия несжимаемости имеем

$$\begin{aligned} \pi (a_1^2 - \rho^2) &= \pi k (a_1^2 \rho_1^2 - r^2), \\ Q &= \frac{1}{r} \sqrt{a_1^2 - k (a_1^2 \rho_1^2 - r^2)}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\rho$  и  $r$  — радиусы точки трубы до и после деформации соответственно.

Для контрвариантных компонент поверхностного напряжения  $k$ -ого слоя имеем

$$P_{(k)}^j = \tau_{(k)}^{j1} n_j, \quad (1.5)$$

где  $n_j$  — ковариантные компоненты единичной нормали к поверхности слоя.

В рассматриваемой задаче  $n_2 = n_3 = 0$  и  $n_1 = \pm 1$  для внешних и внутренних поверхностей слоев.

Следовательно,

$$P_{(n)r=r_n} = \tau_{(n)r=r_n}^{11}, \quad -P_{(n)r=r_{n+1}} = \tau_{(n)r=r_{n+1}}^{11};$$

На поверхностях составных труб имеем условия

$$\begin{aligned} P_{(1)r=r_1} &= \tau_{(1)r=r_1}^{11} = H_{(1)} - L_{(1)}(r_1) = H_{(1)}, \\ -P_{(1)r=r_2} &= \tau_{(1)r=r_2}^{11} = H_{(1)} - L_{(1)}(r_2), \\ P_{(2)r=r_2} &= \tau_{(2)r=r_2}^{11} = H_{(2)}, \\ -P_{(2)r=r_3} &= \tau_{(2)r=r_3}^{11} = H_{(2)} - L_{(2)}(r_3), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$-P_{(n-1)r=r_n} = \tau_{(n-1)r=r_n}^{11} = H_{(n-1)} - L_{(n-1)}(r_n),$$

т. к. согласно (1.2)

$$L_{(k)}(r_k) = 0. \quad (1.7)$$

Из условий  $P_{(k)r=r_k} = -P_{(k-1)r=r_k}$  получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 H_{(1)} &= P_{(1)r=r_1} = R_1, \\
 H_{(1)} - L_{(1)}(r_2) &= H_{(2)}, \\
 H_{(2)} - L_{(2)}(r_3) &= H_{(3)}, \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 H_{(n-2)} - L_{(n-2)}(r_{n-1}) &= H_{(n-1)}, \\
 H_{(n-1)} - L_{(n-1)}(r_n) &= -P_{(n-1)r=r_n} = R_2,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — нормальные напряжения на внешней и внутренней поверхностях составной трубы.

Для результирующего момента и результирующей силы на торцевых плоскостях цилиндра получаются выражения

$$M = 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \int_{r_{k+1}}^{r_k} r^3 (i^2 \Phi_{(k)} + Q^2 \Psi_{(k)}) dr, \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
 N &= 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \int_{r_{k+1}}^{r_k} \left\{ \left( 2i^2 - \frac{Q^2}{i^2} - \frac{1}{Q^2} - \frac{i^2 Q^2 r^2}{i^2} \right) \Phi_{(k)} + \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{i^2}{Q^2} - \frac{2}{i^2} + Q^2 - 2 \frac{i^2 r^2 Q^2}{i^2} \right) \Psi_{(k)} \right\} r dr - \\
 &\quad - \pi \sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 \int_{r_{k+1}}^{r_k} \left\{ \left( \frac{Q^2}{i^2} - \frac{1}{Q^2} - \frac{i^2 Q^2 r^2}{i^2} \right) \Phi_{(k)} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( Q^2 + \frac{i^2}{Q^2} \right) \Psi_{(k)} \right\} \frac{dr}{r} - \pi \sum_{k=1}^{n-1} H_{(k)} (r_{k-1}^2 - r_k^2).
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Задаваясь одним из радиусов  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , при помощи (1.4) и (1.8) можно определить постоянные  $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$  и одно соотношение между  $R_1$  и  $R_2$ .

Напряженное состояние в этом случае определяется соотношениями (1.1), (1.9) и (1.10) с точностью до всестороннего сжатия.

Если известны нормальные напряжения  $R_1$  и  $R_2$  на внешней и внутренней поверхностях, деформированное и напряженное состояния составной трубы определяются следующим образом. На основании (1.8) получаем уравнение

$$R_1 - L_{(1)}(r_2) - L_{(2)}(r_3) - \dots - L_{(n-1)}(r_n) - R_2 = 0, \tag{1.11}$$

которое вместе с условиями несжимаемости (1.4) позволяет определить радиусы  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Имея радиусы составных труб после деформа-

ции, находим деформированное, затем и напряженное состояния трубы.

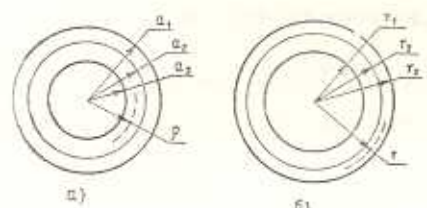
Если взять  $\lambda$  с отрицательным знаком, то получим задачу многослойной трубы, вывернутой наизнанку.

2. В качестве конкретной задачи рассмотрим выворачивание наизнанку цилиндрической двухслойной трубы.

Размеры поперечного сечения до и после деформации показаны на фиг. 2.

В этом случае  $\lambda$  берется с отрицательным знаком и принимается  $\lambda = 0$ .

Когда  $\lambda$  имеет отрицательное значение, из условия несжимаемости получаем



$$Q = \frac{1}{r} \sqrt{a_1^2 + \lambda (a_1^2 \mu_1^2 - r^2)},$$

$$\mu_2 = \frac{1}{a_2} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (\lambda a_1^2 \mu_1^2 + a_1^2 - a_2^2)},$$

$$\mu_3 = \frac{1}{a_3} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (\lambda a_1^2 \mu_1^2 + a_1^2 - a_3^2)}.$$

(2.1)

Фиг. 2.

На основании (1.1) и (1.2) для первого слоя получим

$$\begin{aligned} \tau_{(1)}^{11} &= H_{(1)} - L_{(1)}(r), \\ r^2 \tau_{(1)}^{22} &= H_{(1)} - L_{(1)}(r) + \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi_{(1)} + \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right) \Psi_{(1)}, \\ \tau_{(1)}^{33} &= H_{(1)} - L_{(1)}(r) + \left( \lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi_{(1)} + \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi_{(1)}, \\ \tau_{(1)}^{31} &= \tau_{(1)}^{12} = \tau_{(1)}^{23} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$L_{(1)}(r) = \int_{r_1}^r \left\{ \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \Phi_{(1)} + \left( Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \Psi_{(1)} \right\} \frac{dr}{r}, \quad (2.3)$$

где  $r_1 \leq r \leq r_2$ .

Аналогичные формулы получаются и для напряженного состояния второго слоя. Согласно условиям (1.6) и на основании (1.8) получаем

$$\begin{aligned} H_{(1)} &= R_1, \\ H_{(2)} &= R_1 - L_{(1)}(r_2), \\ H_{(2)} &= R_2 + L_{(2)}(r_3). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отсюда ясно, что для равновесия трубы необходимо

$$R_1 - R_2 = L_{(1)}(r_2) + L_{(2)}(r_3). \quad (2.5)$$

В случае, когда боковые поверхности трубы свободны от напряжений, получим

$$\begin{aligned} H_{(1)} &= 0, \\ H_{(2)} &= -L_{(1)}(r_2) = L_{(2)}(r_3). \end{aligned} \quad (2.6)$$

На основании (2.6) и условий несжимаемости

$$\begin{aligned} a_2^2 - a_3^2 &= (r_3^2 - r_2^2) \lambda, \\ a_1^2 - a_2^2 &= (r_2^2 - r_1^2) \lambda. \end{aligned} \quad (2.7)$$

определяются радиусы  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ , а следовательно, деформированное и напряженное состояния трубы, вывернутой наизнанку, при любой функции энергии деформации.

3. Для иллюстрации рассмотрим следующий численный пример.

Пусть двухслойная труба состоит из несжимаемых материалов, для которых функции энергии деформаций определяются выражениями

$$W_{(1)} = I_1 - 3, \quad (3.1)$$

$$W_{(2)} = 2(I_1 - 3) \quad (3.2)$$

для первого и второго слоя, соответственно.

Пусть в недеформированном состоянии размеры трубы будут:  $l = 30$  см,  $a_1 = 25$  см,  $a_2 = 20$  см,  $a_3 = 10$  см.

Рассмотрим выворачивание трубы. Предположим, что ее внешняя и внутренняя поверхности свободны от напряжений, а  $\lambda = -1$ , т. е. длина трубы не изменяется.

Из (2.7) и (2.6) имеем

$$\begin{aligned} r_3^2 - r_2^2 &= 300, \\ r_2^2 - r_1^2 &= 225, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} r_3^2 - r_1^2 &= 525, \\ L_{(1)}(r_2) + L_{(2)}(r_3) &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\Phi_{(1)} = 2 \frac{\partial W_{(1)}}{\partial I_1} = 2, \quad \Psi_{(1)} = 0 \quad (3.5)$$

$$\Phi_{(2)} = 2 \frac{\partial W_{(2)}}{\partial I_2} = 4, \quad \Psi_{(2)} = 0.$$

Согласно (1.2) имеем

$$\begin{aligned} L_{(1)}(r_2) &= \int_{r_1}^{r_2} \left( Q^2 - \frac{1}{Q^2} \right) 2 \frac{dr}{r}, \\ L_{(2)}(r_3) &= \int_{r_2}^{r_3} \left( Q^2 - \frac{1}{Q^2} \right) 4 \frac{dr}{r}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя в эти уравнения значение  $Q^2$

$$Q^2 = \frac{1}{r^2} (a_1^2 + r_1^2 - r^2),$$

получаем

$$\begin{aligned}
 L_{(1)}(r_2) &= 2 \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{1}{r^3} (a_1^2 + r_1^2 - r^2) - \frac{r}{a_1^2 + r_1^2 - r^2} \right] dr = \\
 &= (625 + r_1^2) \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + \ln \frac{r_1^2 (625 + r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2 \cdot 625}, \\
 L_{(2)}(r_3) &= 4 \int_{r_1}^{r_3} \left[ \frac{1}{r^3} (a_1^2 + r_1^2 - r^2) - \frac{r}{a_1^2 + r_1^2 - r^2} \right] dr = \\
 &= (625 + r_1^2) \left( \frac{2}{r_2^2} - \frac{2}{r_3^2} \right) + \ln \frac{r_2^4 (a_1^2 + r_1^2 - r_3^2)^2}{r_3^4 (a_1^2 + r_1^2 - r_2^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Из (3.4) и (3.3) после простых вычислений получим

$$(625 + r_1^2) \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{225 + r_1^2} - \frac{2}{525 + r_1^2} \right) + \ln \frac{r_1^2 (225 + r_1^2)}{25 (525 + r_1^2)^2} = 0,$$

откуда

$$r_1 = 11.6563 \text{ см},$$

$$r_2 = 18.9964 \text{ см},$$

$$r_3 = 25.7072 \text{ см}.$$

Компоненты тензора напряжений будут

$$\begin{aligned}
 \sigma_{(1)}^{11} &= -760.862 \left( \frac{1}{135.862} - \frac{1}{r^2} \right) - \ln \frac{0.21738 (760.862 - r^2)}{r^2}, \\
 r^2 \sigma_{(1)}^{22} &= \sigma_{(1)}^{11} + \frac{2r^2}{760.862 - r^2} - \frac{2(760.862 - r^2)}{r^2}, \\
 \sigma_{(1)}^{33} &= \sigma_{(1)}^{11} + 2 - \frac{2(760.862 - r^2)}{r^2},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 11.6563 &\leq r \leq 18.9964, \\
 \sigma_{(2)}^{11} &= -2.3026 + \ln \frac{r^4}{43.674 (760.862 - r^2)^2} + \frac{1521.724}{r^2}, \\
 r^2 \sigma_{(2)}^{22} &= \sigma_{(2)}^{11} + \frac{4r^2}{760.862 - r^2} - \frac{4(760.862 - r^2)}{r^2}, \\
 \sigma_{(2)}^{33} &= \sigma_{(2)}^{11} + 4 - \frac{4(760.862 - r^2)}{r^2},
 \end{aligned}$$

где

$$18.9964 \leq r \leq 25.7072.$$

Результирующая сила на торцевой плоскости трубы определяется соотношением

$$N = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r P_{(1)}^1 dr + 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r P_{(2)}^3 dr,$$

где

$$P_{(1)}^3 = \tau_{(1)}^{33} \quad \text{и} \quad P_{(2)}^3 = \tau_{(2)}^{33}.$$

Подставляя значения  $\tau_{(1)}^{33}$  и  $\tau_{(2)}^{33}$ , после простых вычислений находим

$$N = 1877.930 \text{ кг.}$$

Как показывают вычисления, радиусы рассматриваемой составной трубы при выворачивании ее наизнанку, как и в случае однородной трубы, увеличиваются.

Этот эффект имеет место для любой однородной трубы. Для составной трубы при определенном соотношении радиусов составляющих труб, когда материал внутренней трубы сопротивляется упругим деформациям значительно больше, чем материал внешней трубы, может иметь место и обратный эффект.

Например, если взять двухслойную трубу из несжимаемых материалов размерами  $a_3 = 10 \text{ см}$ ,  $a_2 = 15 \text{ см}$ ,  $a_1 = 20 \text{ см}$  и предположить, что для функции энергии деформации имеем выражения

$$W_{(1)} = \frac{1}{2} (I_1 - 3),$$

$$W_{(2)} = 2 (I_1 - 3),$$

то после выворачивания наизнанку, при  $\lambda = -1$ , получим

$$r_1 = 8.9646 \text{ см,}$$

$$r_2 = 15.9801 \text{ см,}$$

$$r_3 = 19.5029 \text{ см.}$$

В этом случае после выворачивания трубы ее радиусы уменьшаются.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 23 IX 1966

Կ. Ս. ՉՈՐԱՆՅԱՆ, Բ. Ե. ՄԵՐՏՉՅԱՆ

ԲԱՂԱԳՐՅԱԿ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐԻ ԶԳՄԱՆ, ԸՆԴՄՐՁԱԿՄԱՆ ԵՎ ՈՒՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ  
ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԱՌԱՋԳՎԱՆ ԳԵՖՈՐՄԱՅԻՄԱՆԵՐԻ ԽԵՊԻՐՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՐ  
ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ւ. մ.

Ներկա աշխատանքում գիտարկվում է համասեռ, իզոտրոպ, անսեղմելի նյութերից պատրաստված և կտրը գլանալին խողովակների ներկայացնող շերտերից կազմված բաղադրյալ խողովակների ձգման, ընդարձակման և ուր-

ման խնդրի ընդհանուր լուծումը վերջավոր առանձնական դեֆորմացիաների տեսությամբ: Դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիան վերցվում է ընդհանուր տեսքով:

Որպես մասնավոր դեպք, ստանալովում է երկշերտ խողովակների շրջումը: Բերվում են թվային օրինակներ:

Աշխատանքում օգտագործվում է համառոտ խողովակների համար Ռիվլինի [1, 2] կողմից արված լուծումները:

K. S. CHOBANIAN, R. E. MKRTCHIAN

## THE GENERAL SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF FINITE DEFORMATIONS FOR EXTENSION, INFLATION AND TORSION OF COMPOSITE CYLINDRICAL TUBES

### S u m m a r y

The general solutions of the problem of finite deformations for extension, inflation and torsion of composite cylindrical tubes, composed of homogeneous, isotropic and incompressible cylindrical tubes are considered.

In particular the solution of the problem of cylindrical tube composed of two layers and turned inside out is considered in detail. Numerical examples are also given.

R. S. Rivlin's solutions [1, 2] for homogeneous cylindrical tubes are used.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials, VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure. Philos. Trans. Roy. Soc., A, 242 (1949), 173—195.
2. Green A. E., Zerna W. Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.