ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XX, № 2, 1967 Механика

А. А. БАБЛОЯН, Н. О. ГУЛКАНЯН

КРУЧЕНИЕ ПОЛОЙ ПОЛУСФЕРЫ ШТАМПОМ

Решению задач кручения полусферы посвящены работы Абрамяна Б. Л., Баблояна А. А., Гулканян Н. О. [1—5].

В настоящей статье рассматривается задача о кручении полой полусферы, скручиваемой посредством поворота сцепленного с ней жесткого штампа, когда на части торца и на сферических частях поверхности заданы напряжения. Решение задачи получено в сферических координатах способом, отличным от работы [3]. Задача сведена к решению тригонометрических парных рядов. С помощью некоторых преобразований эти ряды приведены к рядам по полиномам, являющимся комбинацией полиномов Лежандра. Определение неизвестных коэффициентов в парных рядах-уравнениях сведено к решению квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

§ 1. Постановка задачи

Рассматриваемая задача сводится, как известно [1], к определению функции перемещения $\Psi(r, z)$, которая внутри области осевого сечения удовлетворяет уравнению Митчела

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0. \tag{1.1}$$

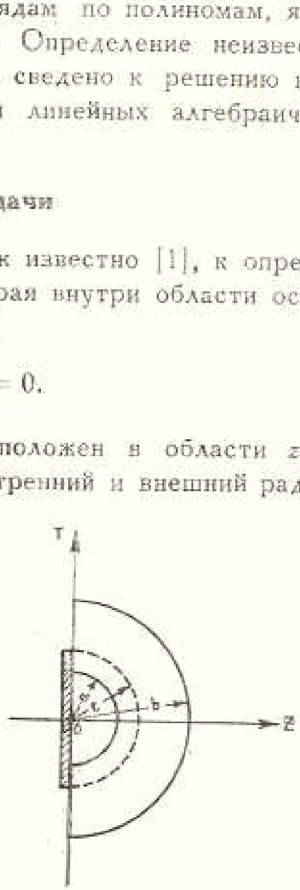
Если предположить, что штамп расположен в области $z = 0$, $a \leqslant r \leqslant c < b$ (фиг. 1), где a и b — внутренний и внешний радиусы полусферы, то функция $\Psi(r, z)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$v = \varkappa r \qquad (a \leqslant r \leqslant c,\ z = 0)$$

$$\tau_{r\varphi} = f_1(r) \quad (c < r \leqslant b,\ z = 0)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = f_2(\theta) \quad \left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ r = b\right) \tag{1.2}$$

$$\tau_{\theta\varphi} = f_3(\theta) \quad \left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ r = a\right).$$



Фиг. 1.

Здесь $\varkappa$ — угол поворота штампа.

Введя новые переменные

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \qquad t = \ln\frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{a},$$

уравнение (1.1) можно преобразовать в уравнение

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}+(1-\xi^2)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}+3\frac{\partial\Psi}{\partial t}-4\xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}=0, \tag{1.3}$$

а граничным условиям (1.2) придать вид

$$\Psi(0,\ t)=\varkappa \qquad (\xi=0,\quad 0\leqslant t\leqslant\beta)$$
$$\tau_\xi=f_1(t) \qquad (\xi=0,\quad \beta<t<t_1)$$

$$\tau_t=f_2(\xi)=G\sqrt{1-\xi^2}\left[b_0+\sum_{k=1}^{\infty}b_kP'_{2k+1}(\xi)\right] \quad (0\leqslant\xi\leqslant1,\ \ t=t_1) \tag{1.4}$$

$$\tau_t=f_3(\xi)=G\sqrt{1-\xi^2}\left[a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_kP'_{2k+1}(\xi)\right] \quad (0\leqslant\xi\leqslant1,\ \ t=0),$$

где $P_n(\xi)$ — полином Лежандра, G — модуль сдвига,

$$\beta=\ln\frac{c}{a},\qquad t_1=\ln\frac{b}{a}.$$

Здесь предположено, что функции $f_2(\xi)$ и $f_3(\xi)$ можно разложить в ряд по полиномам Лежандра.

Напряжения τ_ξ, τ_t и перемещение v в новой системе координат будут определяться через функцию $\Psi(\xi,\ t)$ по формулам

$$\tau_\xi=-G(1-\xi^2)\frac{\partial\Psi}{\partial\xi},\qquad \tau_t=-G\sqrt{1-\xi^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$
$$v=ae^t\sqrt{1-\xi^2}\Psi(t,\ \xi). \tag{1.5}$$

Функцию перемещений $\Psi(t,\ \xi)$ будем искать в следующем виде:

$$\Psi(t,\ \xi)=A_0+B_0e^{-3t}+D_0\left[\frac{1}{1+\xi}-\ln(1+\xi)-t\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha t}[A_k\operatorname{sh}\beta_kt+B_k\operatorname{ch}\beta_kt]P'_{2k+1}(\xi)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}D_kP'_{-\frac{1}{2}+i\mu_k}(\xi)\,e^{-\alpha t}\chi_k(t), \tag{1.6}$$

где

$$\chi_k(t)=\alpha\sin\mu_kt+\mu_k\cos\mu_kt \quad [3,\ 7]$$
$$\alpha=\frac{3}{2},\quad \mu_k=\frac{k\pi}{t_2},\quad \beta_k=\frac{4k+3}{2}. \tag{1.7}$$

Удовлетворяя третьему и четвертому условиям (1.4), после некоторых выкладок для коэффициентов A_k, B_k, B_0, D_0 получим следующие значения:

$$A_k=\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_k t_1}\frac{1}{\beta_k^2-\alpha^2}[-\alpha\operatorname{ch}\beta_k t_1+\beta_k\operatorname{sh}\beta_k t_1]a_k+\frac{\alpha b_k e^{\alpha t_1}}{(\beta_k^2-\alpha^2)\operatorname{sh}\beta_k t_1},$$

$$B_k=\frac{a_k}{\operatorname{sh}\beta_k t_1}\frac{1}{\beta_k^2-\alpha^2}[\alpha\operatorname{sh}\beta_k t_1-\beta_k\operatorname{ch}\beta_k t_1]+\frac{\beta_k b_k e^{\alpha t_1}}{(\beta_k^2-\alpha^2)\operatorname{sh}\beta_k t_1},\tag{1.8}$$

$$B_0=\frac{b_0-a_0}{3(1-e^{-3t_1})},\qquad D_0=\frac{a_0e^{-3t_1}-b_0}{1-e^{-3t_1}}.$$

Здесь учтено, что [1]

$$\int_0^1(1-\xi^2)P'_{2k+1}(\xi)P'_{2p+1}(\xi)\,d\xi=\begin{cases}0 & (p\neq k)\\ \dfrac{(2k+1)(2k+2)}{4k+3} & (p=k)\end{cases}.$$

Удовлетворяя первому и второму условиям (1.4), для определения коэффициента D_k получим парные ряды

$$-\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha t}D_kP'_{-\frac{1}{2}+\mu_k i}(0)\chi_k(t)=-\varkappa+A_0+$$

$$+\frac{1}{1-e^{-3t_1}}\left[b_0\left(\frac{e^{-3t}}{3}+t-1\right)+a_0\left(e^{-3t_1}-te^{-3t_1}-\frac{e^{-3t}}{3}\right)\right],\tag{1.9}$$
$$(0<t<\beta)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}D_kP'_{-\frac{1}{2}+\mu_k i}(0)\,e^{-\alpha t}\chi_k(t)=-\frac{1}{G}f_1(t)+\frac{2a_0e^{-3t_1}-2b_0}{1-e^{-3t_1}}\qquad(\beta<t<t_1).$$

Вводя обозначения

$$\mu_kX_k=D_kP'_{-\frac{1}{2}+\mu_k i}(0),\qquad X_0=-A_0,\tag{1.10}$$

$$g(t)=-\frac{1}{G}f_1(t)+2\frac{a_0e^{-3t_1}-b_0}{1-e^{-3t_1}},$$

$$f(t)=-\varkappa+\frac{1}{1-e^{-3t_1}}\left[b_0\left(\frac{e^{-3t}}{3}+t-1\right)+\right.$$

$$\left.+a_0\left(e^{-3t_1}-te^{-3t_1}-\frac{e^{-3t}}{3}\right)\right]+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha t}P'_{2k+1}(0)\frac{1}{\beta_k^2-\alpha^2}\times$$

$$\times\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_k t_1}\{a_k[\alpha\operatorname{sh}\beta_k(t_1-t)-\beta_k\operatorname{ch}\beta_k(t_1-t)]+b_ke^{\alpha t_1}[\alpha\operatorname{sh}\beta_k t+\beta_k\operatorname{ch}\beta_k t],\tag{1.11}$$

$$N_k=1+\frac{\mu_kP'_{-\frac{1}{2}+\mu_k i}(0)}{P'_{-\frac{1}{2}+\mu_k i}(0)},\tag{1.12}$$

парные ряды (1.9) приведем к виду

$$
\begin{aligned}
&X_0+\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha t} X_k (1-N_k)\chi_k(t)=f(t) \qquad (0<t<\beta)\\
&\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k X_k e^{-\alpha t}\chi_k(t)=g(t) \qquad (\beta<t<t_1).
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

§ 2. Решение парных рядов

Для решения парных рядов поступаем следующим образом. Первое уравнение (1.13) дифференцируем по t и умножаем на $e^{\alpha t}$. Умножив второе уравнение (1.13) на $e^{\alpha t}$, вычитаем из него интеграл от полученного выражения, умноженный на α, т. е. ко второму уравнению применяем операцию $\left| e^{\alpha t}-\alpha\int_0^t e^{\alpha t}dt \right|$. При этом получаем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} X_k (1-N_k)(\mu_k^2+\alpha^2)\sin\mu_k t=F(t) \qquad (0<t<\beta)\\
&\sum_{k=1}^{\infty} X_k (\mu_k^2+\alpha^2)\cos\mu_k t=G(t) \qquad (\beta<t<t_1),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&F(t)=-e^{\alpha t}f'(t)\\
&G(t)=\alpha^2\sum_{k=1}^{\infty} X_k+e^{\alpha t}g(t)-\alpha\int_0^t g(x)e^{\alpha x}dx.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Далее умножим первое уравнение (2.1) на $\frac{2\sqrt{2}}{t_1}\sin\frac{\pi t}{2t_1}\left(\cos\frac{\pi t}{t_1}-\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)^{-1/2}dt$ и проинтегрируем от нуля до θ, а второе — умножим на $-\frac{2\sqrt{2}}{t_1}\sin\frac{\pi t}{2t_1}\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}-\cos\frac{\pi t}{t_1}\right)^{-1/2}dt$ и проинтегрируем от θ до t_1. Тогда будем иметь

$$
\sum_{k=1}^{\infty} X_k(\alpha^2+\mu_k^2)\,z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)=F_1(\theta)+\sum_{k=1}^{\infty} X_k N_k(\alpha^2+\mu_k^2)\,z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right) \qquad (0<\theta<\beta)
\tag{2.3}
$$

$$
\sum_{k=1}^{\infty} X_k(\alpha^2+\mu_k^2)\,z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)=G_1(\theta) \qquad (\beta<\theta<t_1).
$$

Здесь

$$F_1(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{t_1}\int\limits_0^{\theta}F(t)\frac{\sin\dfrac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos\dfrac{\pi t}{t_1}-\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}\right)^{1/2}}\,dt \qquad (0<\theta<\beta), \tag{2.4}$$

$$G_1(\theta)=-\frac{2\sqrt{2}}{t_1}\int\limits_{\theta}^{t_1}G(t)\frac{\sin\dfrac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}-\cos\dfrac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}}\,dt \qquad (\beta<\theta<t_1)$$

$$z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{t_1}\int\limits_0^{\theta}\frac{\sin\dfrac{k\pi t}{t_1}\sin\dfrac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos\dfrac{\pi t}{t_1}-\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}\right)^{1/2}}\,dt=$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{t_1}\int\limits_{\theta}^{t_1}\frac{\cos\dfrac{k\pi t}{t_1}\sin\dfrac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}-\cos\dfrac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}}\,dt. \tag{2.5}$$

Функции $z_k(x)$ представляют собой разность полиномов Лежандра

$$z_k(x)=P_{k-1}(x)-P_k(x).$$

Функции $\{z_k(x)\}$ составляют полную ортогональную систему функций в $L_2[-1, 1]$, т. е. любую функцию $f(x)\in L_2$ можно представить в виде ряда

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k z_k(x), \tag{2.6}$$

где

$$a_k=\frac{k}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)\,z_k(x)\,dx}{1-x}. \tag{2.7}$$

Рассматривая (2.3) как разложение вида (2.6) и пользуясь формулой (2.7), для определения неизвестных коэффициентов X_k получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$X_k=\frac{1}{2}\frac{\mu_k}{\mu_k^2-\alpha^2}\sum_{p=1}^{\infty}X_pN_p(\alpha^2+\mu_p^2)\int\limits_0^{t_1}z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)\times$$

$$\times z_p\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}\,d\theta+\frac{1}{2}\frac{\mu_k d_k}{\mu_k^2+\alpha^2}, \tag{2.8}$$

где

$$d_k = \int_0^{t_1} F_1(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1} z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)d\theta + \int_0^{t_1} G_1(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1} z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)d\theta. \tag{2.9}$$

Выведем теперь уравнение для определения X_0.

Легко видеть, что найденные из бесконечной системы (2.8) значения X_k удовлетворяют уравнениям (2.1), (2.3) и второму уравнению (1.13). При дифференцировании первого уравнения (1.13) пропадает постоянное, вследствие чего первое уравнение (1.13) не эквивалентно первым уравнениям (2.1) и (2.3). Поэтому уравнение для определения X_0 выведем из первого уравнения (1.13).

Умножим обе части первого уравнения (1.13) на $e^{\alpha t}$ и затем подставим в него значение X_k из (2.8). Меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$X_0 e^{\alpha t} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} N_p(\alpha^2+\mu_p^2) X_p \int_0^{t} z_p\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}\,d\theta \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(t)\frac{\mu_k}{\mu_k^2+\alpha^2} z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\chi_k(t)\,d_k}{\mu_k^2+\alpha^2} = f(t)\,e^{\alpha t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k N_k \chi_k(t). \tag{2.10}$$

Пользуясь значением интеграла (см. приложение)

$$\int_0^{t} \frac{z_p\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}\,d\theta}{\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}-\cos\frac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi t}{2t_1}}\int_0^{t}\sin\frac{p\pi\varphi}{t_1}\,d\varphi \tag{2.11}$$

и значением ряда (см. приложение)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\chi_k(t)\,z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)}{\mu_k^2+\alpha^2} = \begin{cases} 0 & (t<\theta) \\ -\sqrt{2}\,\dfrac{\sin\frac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}-\cos\frac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}} & (\theta<t) \end{cases} +$$

$$+\frac{\sqrt{2}\,\alpha}{\operatorname{sh}\alpha t_1}\int_0^{t_1}\frac{\sin\frac{\pi x}{2t_1}\,Q_2(t,x)\,dx}{\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}-\cos\frac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}}, \tag{2.12}$$

где

$$Q_2(t,x) = \begin{cases}\operatorname{ch}\alpha x\, e^{-\alpha(t_1-t)} & (t>x)\\ \operatorname{ch}\alpha(t_1-x)\,e^{\alpha t} & (t<x),\end{cases} \tag{2.13}$$

упростим выражения, входящие в (2.9). После ряда выкладок будем иметь

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} X_p N_p (\alpha^2+\mu_p^2)\int_0^{\beta} z_p\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}\,d\theta\,\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)\frac{\mu_k}{\mu_k^2+\alpha^2}z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)=\sum_{p=1}^{\infty}X_pN_p\gamma_p(t)-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha t_1}e^{\alpha t}\sum_{p=1}^{\infty}N_pX_p(\alpha^2+\mu_p^2)\int_{\beta}^{t_1}z_p\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)\times$$

$$\times\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}d\theta\int_0^{t_1}\frac{\sin\dfrac{\pi x}{2t_1}\operatorname{ch}\alpha(t_1-x)\,dx}{\left(\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}-\cos\dfrac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}},\qquad (0<t<\beta)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\gamma_k(t)\,d_k}{\mu_k^2+\alpha^2}=e^{\alpha t}f(t)-f(0)\,e^{\alpha t}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\alpha e^{\alpha t}}{\operatorname{sh}\alpha t_1}\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\beta}F_1(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}d\theta\int_0^{t_1}\frac{\operatorname{ch}\alpha(t_1-x)\sin\dfrac{\pi x}{2t_1}\,dx}{\left(\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}-\cos\dfrac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}}+\right.$$

$$\left.+\int_{\beta}^{t_1}G_1(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}d\theta\int_0^{t_1}\frac{\sin\dfrac{\pi x}{2t_1}\operatorname{ch}\alpha(t_1-x)\,dx}{\left(\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}-\cos\dfrac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}}\right\}\qquad(0<t<\beta).\tag{2.14}$$

Подставляя (2.14) в (2.9), после несложных преобразований окончательно найдем уравнение для определения X_0

$$X_0-f(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha t_1}\left\{-\sum_{p=1}^{\infty}N_p(\alpha^2+\mu_p^2)X_p\int_{\beta}^{t_1}z_p\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)W(\theta)\,d\theta+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\beta}F_1(\theta)\,W(\theta)\,d\theta+\int_{\beta}^{t_1}G_1(\theta)\,W(\theta)\,d\theta\right\}=0,\tag{2.15}$$

где

$$W(\theta)=\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}\int_0^{t_1}\frac{\sin\dfrac{\pi x}{2t_1}\operatorname{ch}\alpha(t_1-x)\,dx}{\left(\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}-\cos\dfrac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}}.\tag{2.16}$$

Исследуем теперь бесконечную систему (2.8).

Предварительно введем обозначение

$$Y_k = \frac{\alpha^2 + \mu_k^2}{\mu_k} X_k. \tag{2.17}$$

Тогда бесконечная система (2.8) приведется к виду

$$Y_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + b_k, \tag{2.18}$$

где

$$a_{kp} = \frac{1}{2}\, p N_p\, \frac{k y_k\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right) z_p\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right) - p y_p\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right) z_k\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right)}{p^2 - k^2},$$

$$a_{kk} = -\frac{1}{2} N_k \left\{ P_{k-1}\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right) P_k\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right) - 1 + 2\sin^2\frac{\pi\beta}{t_1} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{n=1}^{k-1} \frac{P_n\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right) P_n'\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right)}{n+1} + \frac{1}{2}\left[P_{k-1}^2\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right) - P_k^2\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right)\right]\right\}, \tag{2.19}$$

$$b_k = \frac{1}{2} d_k, \tag{2.20}$$

$$y_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_0^{\theta} \frac{\cos\frac{k\pi t}{t_1} \cos\frac{\pi t}{2t_1}\, dt}{\left(\cos\frac{\pi t}{t_1} - \cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_{\theta}^{t_1} \frac{\sin\frac{k\pi t}{t_1} \cos\frac{\pi t}{2t_1}\, dt}{\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1} - \cos\frac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}}. \tag{2.21}$$

Для доказательства регулярности бесконечной системы (2.18) оценим $\sum\limits_{p=1}^{\infty} |a_{kp}|$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| \leqslant \frac{3}{8}\left\{\frac{1}{k}\frac{2}{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p^{1/2}(k-p)} + \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{p=k+1}^{\infty} \frac{1}{p^{1/2}} \frac{1}{p-k}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{8}\, \frac{3\sqrt{k} + \ln k + 5\ln 2 + 1}{k^2}. \tag{2.22}$$

Здесь принято во внимание, что

$$N_k = 1 + \frac{\mu_k P'_{-\frac{1}{2}+\mu_k i}(0)}{P'_{-\frac{1}{2}+\mu_k i}(0)} \approx \begin{cases} 1 - c\mu_k & \text{при} \quad \mu_k \to 0 \quad [5] \\ \dfrac{3}{8\mu_k^2} + 0\left(\dfrac{1}{\mu_k^4}\right) & \text{при} \quad \mu_k \to \infty, \end{cases}$$

а суммы рядов, входящих в (2.22), оценены с помощью интегралов

$$\int\limits_{k+1}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \frac{dx}{x-k} = 2\left\{-\frac{1}{k\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k^{3/2}} \ln(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\right\},$$

$$\int\limits_{1}^{k-1} \frac{dx}{x^{3/2}(k-x)} = 2\left[\frac{\sqrt{k-1}-1}{k\sqrt{k-1}} + \frac{2}{k^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}\right],$$

$$\int\limits_{0}^{\beta} z_k^+\left(\cos\frac{\pi\vartheta}{t_1}\right) \operatorname{ctg}\frac{\pi\vartheta}{2t_1}\, d\vartheta < \int\limits_{0}^{t_1} z_k^+\left(\cos\frac{\pi\vartheta}{t_1}\right) \operatorname{ctg}\frac{\pi\vartheta}{2t_1}\, d\vartheta = \frac{2}{k}.$$

Полученная оценка (2.22) стремится к нулю при $k \to \infty$, как $0(k^{-3/2})$. Поэтому, начиная с некоторого значения k_0, $\sum\limits_{p=1}^{\infty} |a_{kp}|$ станет меньше единицы, т. е. бесконечная система (2.18) квазивполне регулярна. Значение k_0 легко можно определить при численных расчетах.

Отметим, что в рассматриваемой задаче N_k имело порядок $0(k^{-2})$. Поэтому оценка (2.22) получилась порядка $0(k^{-3/2})$. Если бы N_k имело порядок $0(k^{-1})$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty} |a_{kp}|$ также стремилось бы к нулю, но уже как $0\left(\frac{\ln k}{k}\right)$.

Поскольку в нашей задаче $F_1(\vartheta)$ и $G_1(\vartheta)$, входящие в выражение (2.9),—непрерывные функции, то свободные члены системы b_k при возрастании k будут стремиться к нулю, как $0(k^{-3/2})$. Вследствие этого неизвестные коэффициенты Y_k будут иметь порядок $0(k^{-3/2})$. (Это можно доказать путем применения метода последовательных приближений).

Таким образом, ряд, входящий в выражение для перемещений,—абсолютно сходящийся, и поэтому сумму этого ряда всегда можно вычислить. Ряды же, входящие в выражения напряжений,—абсолютно не сходятся. Суммы этих рядов у краев штампа обращаются в бесконечность.

Выделим главную часть ряда в выражении для напряжения $\tau_2(0, t)$. Согласно (1.5), (1.6), (1.8), (1.10), (2.17) имеем

$$\tau_z(0,\ t) = -G\left\{-\frac{2}{1-e^{-2\alpha t_1}}(a_0 e^{-2\alpha t} - b_0) + e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{\infty} Z_k(t)\frac{\mu_k^2 Y_k}{\alpha^2+\mu_k^2}\right\}. \quad (2.23)$$

$$(0<t<\beta)$$

Подставляя в (2.23) значения неизвестных Y_k из (2.18), после ряда выкладок для напряжения $\tau_z(0,\ t)$ под штампом у его границы, т. е. для значений t, близких по значению к β, получим

$$V_\beta \tau_z(0,\ t) = -Ge^{-\alpha t}\left[\frac{M\cos\dfrac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos\dfrac{\pi t}{t_1} - \cos\dfrac{\pi\beta}{t_1}\right)^{1/2}} + \varphi(t)\right] \quad (t<t_1), \quad (2.24)$$

где $\varphi(t)$ — уже ограниченная и непрерывная функция, а коэффициент M определяется формулой

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[G_1(\beta) - F_1(\beta) - \sum_{k=1}^{\infty} Y_k\mu_k N_k z_k\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right)\right]. \quad (2.25)$$

При получении выражения (2.25) было использовано значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{Z_k(t)\,y_k\left(\cos\dfrac{\pi t}{t_1}\right)}{\mu_k} = \begin{cases} \sqrt{2}\,\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2t_1}}{\left(\cos\dfrac{\pi x}{t_1} - \cos\dfrac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}} - 1 - \alpha x + \\ \qquad + \dfrac{2t_1\alpha}{\pi}\arcsin\dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{2t_1}}{\sin\dfrac{\pi t}{2t_1}} & (x<t). \\ -1 + \alpha(t_1 - x) & (x>t) \end{cases} \quad (2.26)$$

(см. приложение).

§ 3. Парные ряды по косинусам

Если вместо (1.13) имеем парные ряды по косинусам

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} X_k(1-N_k)\mu_k\cos\mu_k t = f(t) - X_0 \qquad (0<t<\beta) \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 X_k\cos\mu_k t = g(t) \qquad (\beta<t<t_1), \end{aligned} \quad (3.1)$$

то подставляя $\alpha = 0$ в бесконечную систему (2.18), для определения неизвестных $Y_k = \mu_k X_k$ получаем бесконечную систему вида (2.18), где a_{kp} определяется формулой (2.19), а свободные члены b_k — по формуле

$$b_k = -\frac{\sqrt{2}}{t_1}\left\{\int_0^{t_1} z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}\,d\theta\int_0^{\theta} f'(t)\frac{\sin\dfrac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos\dfrac{\pi t}{t_1}-\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}\right)^{1/2}}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{t_1} z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}\,d\theta\int_{\theta}^{t_1} g(t)\frac{\sin\dfrac{\pi t}{2t_1}\,dt}{\left(\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}-\cos\dfrac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}}\right\}.$$

Уравнение для определения X_0 в этом случае упрощается и принимает вид

$$X_0 - f(0) + \frac{1}{2}\left\{-\sum_{p=1}^{\infty} N_p Y_p y_p\left(\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right) + \int_0^{\beta} F_1^*(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}\,d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_{\beta}^{t_1} G_1^*(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}\,d\theta\right\} = 0,$$

где

$$F_1^*(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{t_1}\int_0^{\theta} f'(t)\frac{\sin\dfrac{\pi t}{2t_1}\,dt}{\left(\cos\dfrac{\pi t}{t_1}-\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}\right)^{1/2}},$$

$$G_1^*(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{t_1}\int_{\theta}^{t_1} g(t)\frac{\sin\dfrac{\pi t}{2t_1}\,dt}{\left(\cos\dfrac{\pi\theta}{t_1}-\cos\dfrac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}}.$$

Отметим, что в полученных результатах встречаются интегралы, которые в конечном виде не берутся. При численных расчетах, пользуясь формулами, приведенными в приложении, эти интегралы можно представить в виде рядов по функциям $y_k(x)$ или $z_k(x)$ и вычислить полученные ряды.

Приложение

Ниже приводится, как вычислены интеграл (2.11) и суммы рядов (2.12) и (2.25).

1. Для вычисления интеграла (2.11) воспользуемся значением интеграла [8]

$$\int_{\varphi}^{t}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t_1}\,d\theta}{\sqrt{\left(\cos\frac{\pi\varphi}{t_1}-\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}-\cos\frac{\pi t}{t_1}\right)}}=\frac{t_1}{2\sin\frac{\pi\varphi}{2t_1}\sin\frac{\pi t}{2t_1}}. \tag{П.1}$$

Умножая обе части (П.1) на $\sin\frac{\varphi\pi}{2t_1}f(\varphi)\,d\varphi$, проинтегрируем полученное выражение по φ от нуля до t. Меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\int_{0}^{t}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2t}\,d\theta}{\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}-\cos\frac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}}\int_{0}^{\theta}\frac{\sin\frac{\pi\varphi}{2t_1}f(\varphi)\,d\varphi}{\left(\cos\frac{\pi\varphi}{t_1}-\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)^{1/2}}=\frac{t_1}{2\sin\frac{\pi t}{2t_1}}\int_{0}^{t}f(\varphi)\,d\varphi. \tag{П.2}$$

Полагая в формуле (П.2) $f(\varphi)=\sin\frac{p\pi\varphi}{t_1}$ и учитывая при этом (2.5), найдем значение интеграла (2.11).

2. Чтобы найти значение ряда (2.12), предварительно вычислим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\sin\mu_k t z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)}{\mu_k^2+\alpha^2}\quad\text{и}\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)\cos\mu_k t}{\mu_k^2+\alpha^2}. \tag{П.3}$$

Для этого подставим в эти ряды второе из значений $z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)$ (2.5) и затем поменяем порядок суммирования и интегрирования. Далее, пользуясь известными значениями рядов [7]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin kx}{k^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha(\pi-x)}{\operatorname{sh}\alpha\pi}\qquad(0<x<2\pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}\,\frac{\operatorname{ch}\alpha(\pi-x)}{\operatorname{sh}\alpha\pi}-\frac{1}{2\alpha^2}\qquad(0\leqslant x<2\pi)$$

и значением интеграла

$$\int_{\theta}^{t_1}\frac{\sin\frac{\pi x}{2t_1}\,dx}{\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}-\cos\frac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}}=\frac{t_1}{\sqrt{2}},$$

после некоторых преобразований найдем значения вышеупомянутых рядов.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\sin\mu_k t z_k\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}\right)}{\mu_k^2+\alpha^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{t_1}\int_{\theta}^{t_1}\frac{\sin\frac{\pi x}{2t_1}\,dx}{\left(\cos\frac{\pi\theta}{t_1}-\cos\frac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\sin\mu_k t\cos\mu_k x}{\mu_k^2+\alpha^2}=-\frac{\sqrt{2}}{t_1}\int_{\vartheta}^{t_1}\frac{\sin\frac{\pi x}{2t_1}\,dx}{\left(\cos\frac{\pi\vartheta}{t_1}-\cos\frac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}}\times$$

$$\times\left[\frac{t_1}{2}\frac{\operatorname{sh}\alpha(t_1-t-x)}{\operatorname{sh}\alpha t_1}+\begin{cases}\dfrac{t_1}{2}\dfrac{\operatorname{sh}\alpha(t_1-t+x)}{\operatorname{sh}\alpha t_1} & (t>x)\\ -\dfrac{t_1}{2}\dfrac{\operatorname{sh}\alpha(t_1+t-x)}{\operatorname{sh}\alpha t_1} & (t<x)\end{cases}\right]=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sh}\alpha t_1}\int_{\vartheta}^{t_1}\frac{\sin\frac{\pi x}{2t_1}Q_1(t,x)\,dx}{\left(\cos\frac{\pi\vartheta}{t_1}-\cos\frac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}},\qquad(\text{П}.4)$$

где

$$Q_1(t,x)=\begin{cases}\operatorname{ch}\alpha x\operatorname{sh}\alpha(t_1-t) & (t>x)\\ -\operatorname{sh}\alpha t\operatorname{ch}\alpha(t_1-x) & (t<x).\end{cases}$$

Аналогичным образом вычислим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\mu_k t z_k\left(\cos\frac{\pi\vartheta}{t_1}\right)}{\mu_k^2+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{\sqrt{2}}{\alpha\operatorname{sh}\alpha t_1}\int_{\vartheta}^{t_1}\frac{\sin\frac{\pi x}{2t_1}Q_2(t,x)\,dx}{\left(\cos\frac{\pi\vartheta}{t_1}-\cos\frac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}},\qquad(\text{П}.5)$$

где

$$Q_2(t,x)=\begin{cases}\operatorname{ch}\alpha x\operatorname{ch}\alpha(t_1-t) & (t>x)\\ \operatorname{ch}\alpha t\operatorname{ch}\alpha(t_1-x) & (t<x).\end{cases}$$

Имея значения рядов (П.4) и (П.5), а также ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}z_k\left(\cos\frac{\pi\vartheta}{t_1}\right)\cos\mu_k t=\begin{cases}1 & (0<t<\vartheta<t_1)\\ 1-\dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos\frac{\pi\vartheta}{t_1}-\cos\frac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}} & (0<\vartheta<t<t_1),\end{cases}\qquad(\text{П}.6)$$

значение которого можно получить, пользуясь значениями рядов (4) и (5) из работы [7], вычисляем ряд (2.12).

3. При выделении главной части ряда в выражении для напряжения $\tau_\vartheta(0,t)$ нами был использован ряд (2.25). Для вычисления ряда (2.25) первоначально были получены значения рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos\mu_k x y_k\left(\cos\frac{\pi t}{t_1}\right)\quad\text{и}\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_k x}{\mu_k}y_k\left(\cos\frac{\pi t}{t_1}\right).\qquad(\text{П}.7)$$

Значение первого из рядов (П.7) можно получить так же, как и ряда (П.6), т. е. пользуясь значениями рядов (4) и (5) из [7] и учитывая при этом, что $y_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos \mu_k x \, y_k \left(\cos \frac{\pi t}{t_1}\right) = \begin{cases} \dfrac{2^{1/2} \cos \dfrac{\pi x}{2t_1}}{\left(\cos \dfrac{\pi x}{t_1} - \cos \dfrac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}} - 1 & (x < t) \\ -1 & (x > t). \end{cases} \tag{П.8}$$

Чтобы вычислить второй ряд (П.7), подставим в него первое значение $y_k\left(\cos \frac{\pi t}{t_1}\right)$ из (2.21) и поменяем порядок интегрирования и суммирования. Затем, учитывая значение ряда [8]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \qquad (0 < x < 2\pi),$$

после некоторых операций получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k x}{\mu_k} y_k \left(\cos \frac{\pi t}{t_1}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_0^t \frac{\cos \dfrac{\pi \varphi}{2t_1} d\varphi}{\left(\cos \dfrac{\pi \varphi}{t_1} - \cos \dfrac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k x \cos \dfrac{k\pi\varphi}{t_1}}{\mu_k} = \frac{\sqrt{2}}{2t_1} \int_0^t \frac{\cos \dfrac{\pi \varphi}{2t_1} d\varphi}{\left(\cos \dfrac{\pi \varphi}{t_1} - \cos \dfrac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}} \times$$

$$\times \left[t_1 - (x + \varphi) + \begin{cases} -t_1 + \varphi - x & (x < \varphi) \\ t_1 - (x - \varphi) & (x > \varphi) \end{cases} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{t_1} (t_1 - x) \int_0^t \frac{\cos \dfrac{\pi \varphi}{2t_1} d\varphi}{\left(\cos \dfrac{\pi \varphi}{t_1} - \cos \dfrac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}} +$$

$$+ \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}\, x}{t_1} \displaystyle\int_x^t \frac{\cos \dfrac{\pi \varphi}{2t_1} d\varphi}{\left(\cos \dfrac{\pi \varphi}{t_1} - \cos \dfrac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}} & (t > x) \\ 0 & (t < x) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -x + \dfrac{2t_1}{\pi} \arcsin \dfrac{\sin \dfrac{\pi x}{2t_1}}{\sin \dfrac{\pi t}{2t_1}} & (t > x) \\ t_1 - x & (t < x). \end{cases} \tag{П.9}$$

Здесь было использовано значение интеграла

$$\int\limits_0^t \frac{\cos\frac{\pi\varphi}{2t_1}\,d\varphi}{\left(\cos\frac{\pi\varphi}{t_1}-\cos\frac{\pi\beta}{t_1}\right)^{1/2}}=\frac{\sqrt{2}\,t_1}{\pi}\arcsin\frac{\sin\frac{\pi t}{2t_1}}{\sin\frac{\pi\beta}{2t_1}}.$$

Имея значения рядов (П.8) и (П.9), легко найти значение ряда (2.25).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 31 X 1966

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ն. Օ. ԳՈՒԼՔԱՆՅԱՆ

ՍՆԱՄԵՋ ԿԻՍԱԳՆԴԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ ՇՏԱՄՊՈՎ

Հոդվածում դիտարկվում է սնամեջ կիսագնդի ոլորման խնդիրը, երբ ոլորումը իրականացվում է կիսագնդի մակերևույթի հարթ մասին սիմետրիկ ձևով ամրացված կոշտ կլոր շտամպի պտույտի միջոցով: Կիսագնդի մակերևույթի մնացած մասում տրված են լարումները:

Սկզբում խնդիրը բերվում է զույգ շարքերի լուծմանը ըստ (1,7) ֆունկցիաների: Այնուհետև անհայտ գործակիցների որոշման համար զույգ շարքերից ստացվում է հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմ: Ցույց է տրվում, որ այդ սիստեմը կվազի-լիովին ռեգուլյար է, իսկ ազատ անդամները ձգտում են զերոյի $k^{-[illegible]}$ *կարգով:*

Ստացված են բանաձևեր լարումների, տեղափոխությունների, ինչպես նաև շտամպի վրա ազդող ոլորող մոմենտի որոշման համար:

A. A. BABLOYAN, N. O. GULKANIAN

TORSION OF THE HOLLOW SEMISPHERE BY MEANS OF A PUNCH

Summary

In this article the problem of torsion of a hollow semisphere is considered, when it twists by turning a rigid round punch, applied on the central part of the diametral section of the semisphere. On the other part of the surface of the semisphere stresses are applied.

This problem is reduced to the dual series-equations involving the functions (1.7). Unknown coefficients in these series are determined form the quasi-regular infinite system of linear algebraic equations (2.18).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* О кручении тела вращения осесимметричной нагрузкой. ПММ, т. 24, 1960, 1048—1056.
2. *Абрамян Б. Л., Гулканян Н. О.* Кручение полой двухслойной полусферы. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 14, № 1, 1961.
3. *Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* Об одной контактной задаче, связанной с кручением полого полушара. ПММ, т. 26, 1962.
4. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
5. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Кручение полусферы. Известия АН АрмССР, Механика, т. 19, № 5, 1966.
6. *Баблоян А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 15, № 1, 1962.
7. *Баблоян А. А.* Решение некоторых „парных" рядов. Докл. АН АрмССР, т. XXXIX, № 3, 1964.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.