ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 1, 1967 Механика

А. М. СИМОНЯН

О РЕШЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Осесимметричная контактная задача теории упругости решена в работах [1—5] путем сведения ее к парным интегральным уравнениям. Для решения осесимметричной контактной задачи известны также метод сведения к задаче теории потенциала [6—8] и метод сведения к решению парных рядов [9]. В работе [10] решение осесимметричной контактной задачи теории упругости сведено к одному интегральному уравнению Фредгольма 1 рода.

В настоящей работе используется идея сведения поставленной задачи к решению методом М. Г. Крейна [11] одного интегрального уравнения со специальным ядром. Для определения границ контакта здесь используется метод последовательных уточнений [12], который использовался и при решении плоской контактной задачи [13].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим равновесие двух прижимаемых друг к другу ортотропных тел вращения, находящихся в осесимметричном температурном поле. Будем полагать, что сопротивление материалов этих тел описывается формулами линейной наследственности [14]

$$\varepsilon_x(t) = (1-Q^*)\left[\frac{\sigma_x(t)}{E_x} - \nu_{yx}\frac{\sigma_y(t)}{E_y} - \nu_{zx}\frac{\sigma_z(t)}{E_z}\right] + \varepsilon_x^0(t), \quad (x,\ y,\ z) \qquad (1.1)$$

$$\gamma_{xy}(t) = (1-Q^*)\frac{\tau_{xy}(t)}{G_{xy}}, \qquad (x,\ y,\ z) \qquad (1.2)$$

где

$$Q^* v(t) = \int_{\tau_1}^{t} v(\tau)\frac{\partial\delta(t,\ \tau)}{\partial\tau}\,d\tau, \qquad (1.3)$$

$$\delta(t,\ \tau) = E_i C_i(t,\ \tau) = G_{ij}\omega_{ij}(t,\ \tau). \qquad (1.4)$$

Здесь C_i и ω_{ij} — меры ползучести соответственно при осевом нагружении и при сдвиге, а ε^0 — вынужденные деформации.

Учитывая, что зависимость между напряжениями и перемещениями линейная, сведем поставленную задачу к двум задачам — к температурной задаче свободного от нагрузок полупространства и к контактной задаче с учетом перемещений, соответствующих решению температурной задачи.

Примем следующее предложение: „Если объемные силы отсутствуют, то перемещения точек ортотропного тела со свободными от нагрузок поверхностями не зависят от факта ползучести". Доказательство этого предложения аналогично приведенному в [14].

Используя это предложение, температурную задачу для полупространства будем решать в предположении упругой работы материала.

§ 2. О температурной задаче для упругого трансверсально-изотропного полупространства

Уравнения равновесия в перемещениях для трансверсально-изотропного тела запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+a_1\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+a_2\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}=a_3\alpha\frac{\partial T}{\partial r}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}+b_1\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+b_2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+b_1\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}=b_3\alpha\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{2.2}$$

где принято

$$a_1=\frac{G_{rz}}{E_r}\,\frac{1-\nu_{rz}^2-2\nu_{rz}\nu_{zr}-2\nu_{rz}\nu_{zr}\nu_{rz}}{1-\nu_{rz}\nu_{zr}},$$

$$a_2=\frac{\nu_{zr}+\nu_{rz}^2}{1-\nu_{rz}\nu_{zr}}+a_1,\qquad a_3=\frac{1+\nu_{rz}+\nu_{zr}+\nu_{rz}\nu_{zr}}{1-\nu_{rz}\nu_{zr}},$$

$$b_1=\frac{1}{1+\dfrac{E_z}{G_{rz}}\,\dfrac{\nu_{rz}(1+\nu_{rz})}{1-\nu_{rz}^2-2\nu_{rz}\nu_{zr}-2\nu_{rz}\nu_{zr}\nu_{rz}}}, \tag{2.3}$$

$$b_2=\frac{1-\nu_{rz}^2}{\dfrac{G_{rz}}{E_z}(1-\nu_{rz}^2-2\nu_{rz}\nu_{zr}-2\nu_{rz}\nu_{zr}\nu_{rz})+\nu_{rz}(1+\nu_{rz})},$$

$$b_3=\left(1+\frac{\nu_{rz}}{1-\nu_{rz}}\right)b_2.$$

Здесь α — коэффициент температурного расширения, принятый одинаковым во всех направлениях, а $T=0$ соответствует отсутствию напряжений при отсутствии внешних сил.

Применим к уравнениям (2.1) и (2.2) преобразования Ханкеля [15] в виде

$$u(r,\ z)=\int_0^\infty \xi\varphi(\xi,\ z)\,J_1(r\xi)\,d\xi, \tag{2.4}$$

$$w(r,\ z) = \int_0^\infty \xi\psi(\xi,\ z)\, J_0(r\xi)\, d\xi, \tag{2.5}$$

$$T(r,\ z) = \int_0^\infty \xi f(\xi,\ z)\, J_0(r\xi)\, d\xi, \tag{2.6}$$

где $f(\xi,\ z) = \int_0^\infty rT(r,\ z)\, J_0(\xi r)\, dr$, а J_ν — бесселева функция 1 рода индекса ν.

Используя свойства бесселевых функций, из (2.1) и (2.2) получим

$$b_2 \frac{\partial^2\psi(\xi,\ z)}{\partial z^2} + \xi \frac{\partial\varphi(\xi,\ z)}{\partial z} - b_1\xi^2\psi(\xi,\ z) = b_3\alpha \frac{\partial f(\xi,\ z)}{\partial z}, \tag{2.7}$$

$$a_1 \frac{\partial^2\varphi(\xi,\ z)}{\partial z^2} - \xi a_2 \frac{\partial\psi(\xi,\ z)}{\partial z} - \xi^2\varphi(\xi,\ z) = -a_3\alpha\xi f(\xi,\ z). \tag{2.8}$$

Учитывая ограниченность напряжений при $z \to \infty$, найдем

$$\varphi(\xi,\ z) = C_1(\xi)\, e^{-x_1\xi z} + C_2(\xi)\, e^{-x_2\xi z} + \sum_{i=1}^{4} A_i e^{x_i\xi z} \int_0^z e^{-x_i\xi\zeta} F(\xi,\ \zeta)\, d\zeta, \tag{2.9}$$

$$\psi(\xi,\ z) = \left(\frac{a_3}{a_2} - b_3\right)\frac{\alpha}{b_1\xi^2}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1\xi^3}\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3} + \left(1 - \frac{b_2}{a_2}\right)\frac{1}{b_1\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{2.10}$$

где

$$F(\xi,\ \zeta) = \frac{(a_2 b_3 - a_3 b_2)\dfrac{\partial^2 f(\xi,\ \zeta)}{\partial\zeta^2} + a_3 b_1\xi^2 f(\xi,\ \zeta)}{a_1 b_2}\,\alpha\xi.$$

Здесь x_i — корни уравнения ($\operatorname{Re} x_1 > 0$; $\operatorname{Re} x_2 > 0$)

$$\Phi(x) \equiv x^4 + \frac{a_2 - b_1 - b_2}{a_1 b_2} x^2 + \frac{b_1}{a_1 b_2} = 0,$$

а A_i — коэффициенты разложения

$$\frac{1}{\Phi(D)} = \sum_{i=1}^{4} \frac{A_i}{D - x_i}.$$

Используя краевые условия $\sigma_z|_{z=0} = 0$, $\tau_{rz}|_{z=0} = 0$, для определения $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ получим уравнения

$$a_1[x_1^2 C_1(\xi) + x_2^2 C_2(\xi)] - \left(1 - \frac{a_2\nu_{r\varphi}}{1 - \nu_{r\varphi}}\right)[C_1(\xi) + C_2(\xi)] =$$

$$= a_2\left(1 - \frac{a_3}{a_2} + \frac{2\nu_{rz}}{1 - \nu_{r\varphi}}\right)\frac{\alpha}{\xi} f(\xi,\ z)|_{z=0}, \tag{2.11}$$

$$[x_1C_1(\xi)+x_2C_2(\xi)](b_2+a_2b_1-a_2)-$$

$$-a_1b_2[x_1^3C_1(\xi)+x_2^3C_2(\xi)]=(a_2b_2-a_1)\frac{\alpha}{\xi^2}\frac{\partial f(\xi, z)}{\partial z}\bigg|_{z=0}. \qquad (2.12)$$

Если между упругими постоянными трансверсально-изотропного тела имеют место следующие связи

$$\frac{E_r}{E_z}=1-\nu_{r\theta}^2+\nu_{rz}^2, \qquad (2.13)$$

$$\nu_{r\theta}=\frac{\nu_{rz}(1-\nu_{rz})}{\frac{E_r}{E_z}-\nu_{rz}}, \qquad (2.14)$$

которые тождественно удовлетворяются для изотропного тела, то частные решения уравнений (2.1) и (2.2) можно выразить посредством одной функции П, называемой для изотропного тела термоупругим потенциалом перемещений [16]

$$u=\frac{\partial \Pi}{\partial r}, \qquad w=\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \qquad (2.15)$$

При этом для функции $\Pi(r, z, t)$ получим уравнение Пуассона

$$\nabla^2\Pi=\Omega T, \qquad (2.16)$$

где

$$\Omega=\alpha\frac{1+\nu_{r\theta}+\nu_{zr}+\nu_{zr}\nu_{rz}}{1-\nu_{rz}\nu_{zr}}. \qquad (2.17)$$

Вслед за этим определяем напряжения на границе полупространства и решаем задачу для полупространства, находящегося под действием нагрузок, равных и противоположно направленных полученным напряжениям, при отсутствии воздействия температуры. Наложение этих двух решений дает искомое решение задачи.

§ 3. Зависимость перемещения границы полупространства от осесимметричной нормальной нагрузки

В работе [13] было показано, что при отсутствии заданных и вынужденных деформаций напряженное состояние анизотропного тела не зависит от факта ползучести. Поэтому напряжения от действия сосредоточенной силы $p(\xi, t)\,ds$ будут распределяться по упругому закону [17]:

$$\sigma_r(r, z)=-\frac{p(\xi, t)\,ds}{2\pi}\left\{\frac{z}{\sqrt{\mu}(\beta_1-\beta_2)}\left[\frac{\beta_1^2}{(R^2+\beta_1^2z^2)^{3/2}}-\frac{\beta_2^2}{(R^2+\beta_2^2z^2)^{3/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu_{r\theta}}{\sqrt{\mu}(\beta_1-\beta_2)}\frac{z}{R^2}\left[\frac{\beta_1^2(1-h\beta_2^2)}{(R^2+\beta_1^2z^2)^{1/2}}-\frac{\beta_2^2(1-h\beta_1^2)}{(R^2+\beta_2^2z^2)^{1/2}}\right]-\frac{(1-\nu_{r\theta})(h+\sqrt{\mu})}{\mu R^2}\right\}, \qquad (3.1)$$

$$\sigma_\varphi(r, z) = -\frac{p(\xi, t)\,ds}{2\pi}\left\{\frac{\sqrt{\mu}}{hc-\mu}\,\frac{z}{\rho_1-\rho_2}\left[\frac{\rho_2^2(\lambda - h\rho_2^2)(1-h\rho_1^2)}{(R^2+\rho_2^2z^2)^{3/2}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\rho_1^2(\lambda - h\rho_1^2)(1-h\rho_2^2)}{(R^2+\rho_1^2z^2)^{3/2}}\right] - \frac{1-\nu_{rz}}{\sqrt{\mu}(\rho_1-\rho_2)}\,\frac{z}{R^2}\left[\frac{\rho_1^2(1-h\rho_2^2)}{(R^2+\rho_1^2z^2)^{1/2}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\rho_2^2(1-h\rho_1^2)}{(R^2+\rho_2^2z^2)^{1/2}}\right] + \frac{(1-\nu_{rz})(h+\sqrt{\mu})}{\mu R^2}\right\}, \tag{3.2}$$

$$\sigma_z(r, z) = \frac{p(\xi, t)\,ds}{2\pi\mu}\,\frac{z}{\rho_1-\rho_2}\left[\frac{1}{(R^2+\rho_1^2z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(R^2+\rho_2^2z^2)^{3/2}}\right], \tag{3.3}$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{R}{z}\,\sigma_z(r, z), \tag{3.4}$$

где приняты обозначения

$$h = -\frac{\nu_{zr}(1+\nu_{rz})}{1-\nu_{rz}\nu_{zr}}, \qquad \lambda = \frac{\nu_{rz} + \nu_{zr}E_r\left(\frac{\nu_{zr}}{E_z} - \frac{1}{G_{rz}}\right)}{1-\nu_{rz}\nu_{zr}},$$

$$c = \frac{\frac{E_z}{G_{rz}} - \nu_{zr}(1+\nu_{rz})}{1-\nu_{zr}\nu_{rz}}, \qquad \mu = \frac{E_z}{E_r}\,\frac{1-\nu_{rz}^2}{1-\nu_{zr}\nu_{rz}}, \tag{3.5}$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{h+c+\sqrt{(h+c)^2-4\mu}}{2\mu}},$$

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{h+c-\sqrt{(h+c)^2-4\mu}}{2\mu}}, \tag{3.6}$$

а $R = |\bar{r} - \bar{\xi}|$ — расстояние между точкой приложения силы $p(\xi, t)\,ds$ и точкой $(r, \varphi, 0)$.

Пользуясь уравнениями (1.1) и геометрическими соотношениями, определим отсюда вертикальные перемещения точек границы полупространства, вызванные силой $p(\xi, t)\,ds$

$$w(r, 0, t) = \frac{\omega}{R}(1 - Q^*)\,p(\xi, t)\,dS + \text{const}, \tag{3.7}$$

где

$$\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu}\,\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1-\rho_2)}\left[\frac{\rho_1^4-\rho_2^4}{E_r} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{E_r}\,\frac{\rho_1^4(\lambda - h\rho_1^2)(1-h\rho_2^2) - \rho_2^4(\lambda - h\rho_2^2)(1-h\rho_1^2)}{hc-\mu} - \frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{E_z}\right]. \tag{3.8}$$

При действии давления $p(\xi, t)$ в области контакта S перемещение границы полупространства определяется по формуле

$$w(r,\ 0,\ t) = \omega(1 - Q^*)\int\limits_S \frac{p(\xi,\ t)}{R}\,dS + \text{const.} \tag{3.9}$$

В качестве элементов площади S будем рассматривать кольца радиуса ξ элементарной толщины. Тогда из (3.9) получим

$$w(r,\ 0,\ t) = \omega(1 - Q^*)\int\limits_0^{a(t)} \xi p(\xi,\ t)\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\xi^2 + r^2 - 2r\xi\cos\vartheta}}\,d\xi =$$

$$= \frac{4\omega}{r}(1 - Q^*)\int\limits_0^{a(t)} p(\xi,\ t)\,K\left(\sqrt{\frac{\xi}{r}}\right)\xi d\xi, \tag{3.10}$$

где K — полный эллиптический интеграл 1 рода.

Формула (3.10) дает зависимость вертикального перемещения точек на границе полупространства, вызванного давлением $p(r,\ t)$.

§ 4. Осесимметричная контактная задача

Как известно [1], в области контакта имеет место соотношение

$$w_1(r,\ t) + w_2(r,\ t) = \chi_0(t) - f_1(r) - f_2(r), \tag{4.1}$$

где w_1 и w_2 — перемещения границ соответственно двух сжимаемых тел, вызванные суммарным действием температуры и напряжений, f_1 и f_2 — уравнения поверхностей этих тел, а $\chi_0(t)$ — произвольная функция времени.

Из (3.10) и (4.1) получим

$$\frac{4}{r}\int\limits_0^{a(t)} p(\xi,\ t)\,K\left(\sqrt{\frac{\xi}{r}}\right)\xi d\xi = q(r,\ t), \tag{4.2}$$

$$(\omega_1 + \omega_2 - \omega_1 Q_1^* - \omega_2 Q_2^*)\,q(r,\ t) = \chi_0(t) - f_1(r) - f_2(r) -$$
$$- w_{1_T}(r,\ t) - w_{2_T}(r,\ t), \tag{4.3}$$

где w_T — вызванные действием температуры при отсутствии давления перемещения, которые рассмотрены в § 2.

Уравнение (4.3) сводится к определению резольвенты интегрального ядра

$$H(t,\ \tau) = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}\,\frac{\partial\delta_1(t,\ \tau)}{\partial\tau} + \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\,\frac{\partial\delta_2(t,\ \tau)}{\partial\tau}. \tag{4.4}$$

В некоторых частных случаях решение (4.3) дается в виде квадратур ([13], [18]).

При решении уравнения (4.2) воспользуемся методом Крейна, согласно которому функция $p(\xi,\ t)$ определяется через решение $g(\xi,\ a)$ уравнения (4.2) при правой части, равной 1 [11]

$$p(\xi,\ t)=\frac{1}{M'(a)}\left[\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_0^{a(t)} g^*(s,\ a)\,q(s,\ t)\,ds\right]g(\xi,\ a)-$$

$$-\int\limits_{\xi}^{a(t)} g(\xi,\ u)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{M'(u)}\frac{\partial}{\partial u}\int\limits_0^{u} g^*(s,\ u)\,q(s,\ t)\,ds\right)du, \tag{4.5}$$

где $g^*(s,\ a)$ — функция, в которую превращается $g(s,\ a)$ при замене ядра уравнения (4.2) транспонированным ядром $\frac{r}{\xi}K\left(\sqrt{\frac{r}{\xi}}\right)$, а

$$M(a)=\int\limits_0^{a(t)} g(s,\ a)\,ds. \tag{4.6}$$

Условием использования формулы (4.5) является $M'(a)\neq 0$. В данной задаче это условие не выполняется. Однако, в интегральных уравнениях 1 рода, коим является (4.2), в качестве неизвестной функции можно рассматривать произведение искомой функции на некоторую, вообще говоря, произвольную функцию $\psi(s)$. При этом будем иметь новое ядро уравнения. Отметим, что это новое ядро не должно зависеть от параметра a, так как при этом формула (4.5) будет неверной. Вслед за этим можно пользоваться формулой (4.5), заменяя в ней $p(\xi,\ t)$ на $\psi(\xi)\,p(\xi,\ t)$, $g(s,\ a)$ и $g^*(s,\ a)$ на соответственные решения для нового ядра $g_H(s,\ a)$ и $g_H^*(s,\ a)$, $M(a)$ — на $N(a)$,

где
$$N(a)=\int\limits_0^{a(t)} g(s,\ a)\,\psi(s)\,ds. \tag{4.7}$$

Лучше всего подобрать такую функцию $\psi(s)$, при которой $N'(a)=1$. В таком случае вышеуказанный прием не только позволит использовать метод Крейна, но и упростит формулу (4.5).

Решением уравнения

$$4\int\limits_0^{a(t)} g(\xi,\ a)\,\frac{\xi}{r}\,K\left(\sqrt{\frac{\xi}{r}}\right)d\xi=1 \tag{4.8}$$

будет

$$g(s,\ a)=\frac{1}{\pi^2}\,\frac{1}{\sqrt{a^2-s^2}}. \tag{4.9}$$

Условие $N(a)=a$ будет удовлетворено при

$$\psi(s)=\pi^2 s. \tag{4.10}$$

Из выражения (3.10) видно, что при условии (4.10)

$$g_H(s,\ a)=g_H^*(s,\ a).$$

Используя формулу (4.5), с помощью вышеуказанного приема после очевидных преобразований получим

$$p(r,\ t)=\frac{\chi(t)}{\sqrt{a^2(t)-r^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_r^{a(t)}\frac{1}{\sqrt{u^2-r^2}}\int\limits_0^u\frac{1}{\sqrt{u^2-s^2}}\ \frac{\partial}{\partial s}\left\{s\,\frac{\partial F(s,\ t)}{\partial s}\right\}dsdu, \tag{4.11}$$

где $\chi(t)$ — некоторая произвольная функция времени.

Функция $F(r,\ t)$ определяется по формуле

$$F(r,\ t)=\frac{1}{\omega_1+\omega_2}(1+R^*)[f_1(r)+f_2(r)+w_{1_T}(r,t)+w_{2_T}(r,\ t)], \tag{4.12}$$

где $R(t,\ \tau)$ — резольвента ядра $H(t,\ \tau)$ из (4.4).

В случае, когда поверхности соприкасаемых тел достаточно гладки, то есть $f_1(r)$ и $f_2(r)$ непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными, мы принимаем $\chi(t)\equiv 0$ из условия ограниченности давлений в крайних точках контакта. Для определения радиуса контакта $a(t)$ воспользуемся условием равновесия

$$P(t)=\int\limits_{\Omega}p(r,\ t)\,ds=2\pi\int\limits_0^{a(t)}rp(r,\ t)\,dr, \tag{4.13}$$

($P(t)$ — сжимающая сила), откуда после очевидных преобразований получим

$$\int\limits_0^{a(t)}\sqrt{a^2(t)-s^2}\,\varphi(s,t)\,ds=f_0(t), \tag{4.14}$$

где

$$\varphi(s,\ t)=\frac{\partial}{\partial s}\left\{s\frac{\partial}{\partial s}F(s,\ t)\right\}, \tag{4.15}$$

$$f_0(t)=\frac{\pi}{2}(\omega_1+\omega_2)(1-H^*)P(t). \tag{4.16}$$

Уравнение (4.14) относительно $a(t)$ решаем методом последовательных уточнений [12], согласно которому

$$a(t)=\lim_{n\to\infty}\eta(f_{u_n}), \tag{4.17}$$

где

$$f_{u_{n+1}}=f_0+f_{u_n}-B(f_{u_n}),\quad f_{u_0}\equiv f_0, \tag{4.18}$$

$$B(f_{u_n})=\int\limits_0^{\eta(f_{u_n})}\sqrt{\eta^2(f_{u_n})-s^2}\,\varphi(s,\ t)\,ds. \tag{4.19}$$

Достаточным условием, предъявляемым к функции $\eta(f)$ для сходимости вышеуказанного решения, является условие

$$0 < B'(f) < 2. \tag{4.20}$$

Вследствие гладкости поверхностей контакта, функция $\varphi(s, t)$ непрерывна. Для случая $\varphi(s, t) > 0$, представляющего наибольший практический интерес, можно указать выражение для функции $\eta(f)$, удовлетворяющей (4.20). Здесь можно положить

$$\varphi(s, t) \leq \Phi, \tag{4.21}$$

где Φ — некоторая положительная постоянная.

Неравенство (4.20) можно записать в виде

$$0 < \frac{1}{2}\int_0^{\eta(f)} \frac{[\eta^2(f)]'}{\sqrt{\eta^2(f) - s^2}}\varphi(s, t)\,ds < 2. \tag{4.22}$$

Подставляя сюда (4.21), получим

$$\eta(f) = c\sqrt{f}, \tag{4.23}$$

где

$$c < \sqrt{\frac{8}{\pi\Phi}}.$$

Учитывая, что сходимость метода будет наилучшей при близости $B'(f)$ к единице, для функции $\eta(f)$ в практических случаях можно рекомендовать значение

$$\eta(f) = \frac{2}{\sqrt{\pi\Phi}}\sqrt{f}. \tag{4.24}$$

В таком случае формулы (4.17) и (4.18) будут иметь вид

$$a(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi\Phi}}\sqrt{f_{u_n}}, \tag{4.25}$$

где

$$f_{u_{k+1}} = \frac{\pi}{2}(\omega_1 + \omega_2)P(t) + f_{u_k} - \int_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi\Phi}}\sqrt{f_{u_k}}} \sqrt{\frac{4f_{u_k}}{\pi\Phi} - s^2}\,\varphi(s, t)\,ds.$$

В случае, когда границы контакта постоянны, для функции $\chi(t)$, определяемой из условия (4.13), получим выражение

$$\chi(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\pi a}P(t) - \frac{1}{\pi^2 a}\int_0^a \sqrt{a^2 - s^2}\,\varphi(s, t)\,ds.$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 I 1966

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Գծային ժառանգականության տեսության շրջանակներում դիտարկվում է տրանսվերսալ-իզոտրոպ երկու մարմինների կոնտակտային խնդիրը, երբ վերջիններս գտնվում են ջերմային հոսքի ազդեցության տակ։

Ջերմային խնդիրը լուծելիս օգտագործված է Հանկելի ձևափոխությունը։

Կոնտակտային խնդիրը բերված է Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման, որը լուծված է Մ. Գ. Կրեյնի մեթոդով։

Կոնտակտի սահմանների որոշման համար ստացված հավասարումը լուծված է հաջորդական մոտավորությունների եղանակով։

A. M. SIMONIAN

THE SOLUTION OF ASYMMETRIC TEMPERATURE CONTACT PROBLEMS ON THE CREEP OF TRANSVERSAL ISOTROPIC BODIES

Summary

In the paper investigations are made of pressure in the field of the contact of two compressed transversal isotropic asymmetrical bodies in the temperature flow.

It is assumed that the material of these bodies are resisted by the law of linear heredity.

Henkel's transformation is used in solving temperature problems.

Krein's method of solving Fredholm integral equations of the first kind is used in solving the principal equations of contact problems.

To determine the boundaries of contact an equation is obtained, solved by the method of sequent correction proposed by the author.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
2. *Бородачев Н. М.* О решении контактной задачи термоупругости в случае осевой симметрии. Изв. АН СССР, ОТН, 1962, № 5.
3. *George D. L., Sneddon J. N.* The axisymmetric Boussinesq problem for a heated punch. J. Math. and Mech., 11, № 5, 1962.
4. *Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М.* Осесимметричная контактная задача для трансверсально-изотропного слоя, покоящегося на жестком основании. Изв. АН СССР, ОТН, 1962, № 3.
5. *Рубцов В. М., Смоловик И. И.* Решение некоторых задач о деформации упругого полупространства в цилиндрических координатах. Труды Сибирского металлургического института, 1957.

6. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1953.
7. *Payne L. E.* On axially symmetric crack and punch problems for a medium with transverse isotropy. Proc. Cambridge Philos. Soc., 50, № 3, 1954.
8. *Довнорович В. И.* Пространственная контактная задача о жестком штампе с поверхностью вращения, изображаемой полиномом относительно декартовых координат. ПММ, т. 21, вып. 2, 1957.
9. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* О сжатии упругой сферы с жесткой кольцевой обоймой. Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 17, № 3, 1964.
10. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения осесимметричной контактной задачи теории упругости. ПММ, т.25, вып. 1, 1961.
11. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, т. 100, № 3, 1955.
12. *Симонян А. М.* Температурная задача цилиндрических труб в условиях пластической наследственности. Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 4, 1965.
13. *Симонян А. М.* О плоской контактной задаче анизотропных тел с учетом ползучести. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 19, № 4, 1966.
14. *Симонян А. М.* О плоской температурной задаче контакта ортотропных тел с учетом ползучести. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 19, № 6, 1966.
15. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. Изд-во иностр. лит., М., 1955.
16. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. Физматгиз, М., 1963.
17. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
18. *Прокопович И. Е.* О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. 20, вып. 6, 1956.