ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 1, 1967 Механика

А. П. МЕЛКОНЯН

ОБ ИЗГИБЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Исходя из уточненной теории анизотропных пластинок, изложенной в работе [1], дается решение задачи изгиба прямоугольной трансверсально-изотропной пластинки, лежащей на упругом винклеровом основании, под действием произвольной поперечной нагрузки в случае, когда два противоположных края пластинки свободно оперты, а два других могут быть закреплены различным образом.

В частности, решена задача изгиба прямоугольных пластинок, свободно опертых по всему контуру, под действием равномерно-распределенной нагрузки.

§ 1. Задача об изгибе трансверсально-изотропных пластинок по уточненной теории С. А. Амбарцумяна [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов и нормальных напряжений в плоскостях, параллельных срединной плоскости пластинки, приводится к следующей системе двух независимых уравнений относительно прогиба w и некоторой функции Φ [2]:

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w &= Z-\omega\Delta Z, \\ \Delta\Phi-\delta^2\Phi &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы выражаются через функции w и Φ следующим образом:

$$\begin{gathered} M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{2D}{\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta w+\frac{2}{\delta^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\omega\left(Z-\frac{2}{\delta^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right), \\ M_y=-D\left(\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{2D}{\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta w-\frac{2}{\delta^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\omega\left(Z-\frac{2}{\delta^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right), \\ H=-D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{2D}{\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Delta w-\frac{2\omega}{\delta^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right), \\ N_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w-\omega\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ N_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\omega\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где

$$\delta^2=\frac{10\,G'}{Gh^2},\qquad \omega=\frac{h^2}{10\,(1-\mu)}\left(2\frac{G}{G'}-\mu'\frac{E}{E'}\right), \tag{1.3}$$

Δ — оператор Лапласа; h, D — толщина и изгибная жесткость пластинки; E, G, μ — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии, параллельной срединной плоскости пластинки; E', G', μ' — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскостях, перпендикулярных плоскости изотропии; Z — интенсивность распределенной поперечной нагрузки.

Уравнения изгиба пластинки, лежащей на сплошном упругом винклеровом основании, а также все необходимые расчетные величины получим из приведенных выше формул, если в них положить

$$Z = q(x, y) - kw, \tag{1.4}$$

где k — коэффициент постели, $q(x, y)$ — интенсивность активной нагрузки.

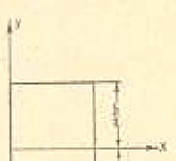
§ 2. Рассмотрим задачу об изгибе прямоугольной пластинки, лежащей на упругом основании, под действием произвольной активной поперечной нагрузки $q(x, y)$.

Пусть пластинка изготовлена из трансверсально-изотропного материала, плоскость изотропии которого параллельна срединной плоскости пластинки.

Подставив (1.4) в (1.1), для задачи изгиба пластинки, лежащей на упругом основании, получим следующие уравнения:

$$\begin{gathered} D\Delta\Delta w + k(w - \omega\Delta w) = q - \omega\Delta q, \\ \Delta\Phi - \gamma^2\Phi = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Пусть пластинка свободно оперта по двум противоположным краям $x = 0$ и $x = a$ (фиг. 1). Условия свободного опирания по этим краям, согласно [1], запишутся в виде



Фиг. 1.

$$w = 0, \quad M_x = 0, \quad \psi = \frac{12}{h^3} N_y = 0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = a. \end{matrix} \tag{2.2}$$

Решения уравнений (2.1), тождественно удовлетворяющие граничным условиям (2.2), ищем в виде

$$\begin{gathered} w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(y) \sin \lambda_n x, \\ \Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(y) \cos \lambda_n x \quad \left(\lambda_n = \frac{\pi n}{a}\right). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в уравнения (2.1) и представив внешнюю активную нагрузку в виде ряда

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(y) \sin \lambda_n x, \tag{2.4}$$

где

$$P_n(y) = \frac{2}{a}\int_0^a q(x, y) \sin \lambda_n x dx, \tag{2.5}$$

получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $W_n(y)$ и $\Phi_n(y)$:

$$W_n^{IV} - 2(\gamma_n^2 - \delta_n^2) W_n'' + (\delta_n^2 + \gamma_n^2) W_n = \frac{1 + \lambda_n^2 \omega}{D} P_n(y) - \frac{\omega}{D} P_n''(y), \tag{2.6}$$

$$\Phi_n'' - (\lambda_n^2 + \delta_n^2)\Phi_n = 0, \tag{2.7}$$

где

$$\left.\begin{matrix}\gamma_n^2 \\ \delta_n^2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\lambda_n^4 + \frac{k}{D}(1 + \lambda_n^2 \omega)} \pm \left(\lambda_n^2 + \frac{k\omega}{2D}\right)\right]. \tag{2.8}$$

Общее решение каждого из уравнений (2.6) и (2.7) соответственно запишется в виде

$$W_n(y) = A_n \operatorname{ch} \gamma_n y \cos \delta_n y + B_n \operatorname{sh} \gamma_n y \sin \delta_n y +$$

$$+ C_n \operatorname{sh} \gamma_n y \cos \delta_n y + D_n \operatorname{ch} \gamma_n y \sin \delta_n y + W_n^*(y), \tag{2.9}$$

$$\Phi_n(y) = F_n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n^2 + \delta^2}\, y + H_n \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n^2 + \delta^2}\, y. \tag{2.10}$$

Здесь W_n^* представляет собой частное решение неоднородного уравнения (2.6) и определяется формулой

$$W_n^*(y) = \frac{1}{2D\gamma_n\delta_n(\gamma_n^2 + \delta_n^2)} \int^{(y)} [\omega P_n''(\eta) - (1 + \lambda_n^2\omega) P_n(\eta)] \times$$

$$\times [\gamma_n \sin \delta_n(\eta - y) \operatorname{ch} \gamma_n(\eta - y) - \delta_n \cos \delta_n(\eta - y) \operatorname{sh} \gamma_n(\eta - y)] d\eta, \tag{2.11}$$

где под введенным обозначением (y) над знаком интеграла будем понимать, что после выполнения интегрирования следует η заменить через y.

Постоянные интегрирования A_n, B_n, C_n, D_n, F_n, H_n, входящие в (2.9) и (2.10), определяются из граничных условий пластинки по краям $y = \pm \frac{b}{2}$.

Таким образом, решение каждой конкретной задачи сводится к нахождению постоянных интегрирования, входящих в выражения (2.9), (2.10), после чего по вышеприведенным формулам могут быть определены все необходимые расчетные величины.

§ 3. В качестве примера рассмотрим задачу изгиба прямоугольной пластинки, лежащей на упругом основании, под действием равномерно распределенной нагрузки $q_0 = \text{const}$ в случае, когда пластинка свободно оперта по всему контуру. Для равномерно распределенной нагрузки выражение (2.5) примет вид

$$P_n = \frac{4q_0}{\pi D} \qquad (n=1,\ 3,\ 5\ldots). \tag{3.1}$$

В этом случае изогнутая поверхность пластинки симметрична относительно оси x (фиг. 1). В силу указанной симметрии очевидно, что в выражениях (2.9) и (2.10) $\Phi_n(y)$ будет нечетной, а $W_n(y)$ — четной функциями. Поэтому для рассматриваемой здесь задачи в выражениях (2.9) и (2.10) следует положить

$$C_n = D_n = H_n = 0. \tag{3.2}$$

С учетом (3.1) и (3.2) из (2.9) и (2.10) получим

$$\begin{gathered} W_n(y) = A_n \operatorname{ch}\gamma_n y \cos\delta_n y + B_n \operatorname{sh}\gamma_n y \sin\delta_n y + \frac{4q_0(1+\lambda_n^2\omega)}{\pi Dn(\gamma_n^2+\delta_n^2)^2}, \\ \Phi_n(y) = F_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n^2+\delta^2}\, y. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Неизвестные постоянные A_n, B_n, F_n, в силу симметрии, могут быть определены из условий свободного опирания пластинки по одному из краев $y = \pm\frac{b}{2}$.

Условия свободного опирания по краю $y = \frac{b}{2}$ имеют вид [1]

$$w = 0, \qquad M_y = 0, \qquad \varphi = \frac{12}{h^3} N_x = 0. \tag{3.4}$$

Учитывая (1.2) и (2.3), граничные условия (3.4) можно привести к виду

$$\begin{gathered} W_n\left(\frac{b}{2}\right) = 0, \\ W_n''\left(\frac{b}{2}\right) + \frac{\omega}{D} P_n\left(\frac{b}{2}\right) - \frac{1}{D\lambda_n}\Phi_n'\left(\frac{b}{2}\right) = 0, \\ W_n''\left(\frac{b}{2}\right) + \frac{\omega}{D} P_n\left(\frac{b}{2}\right) = 0. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Подставив значения $W_n(y)$, $\Phi_n(y)$ и $P_n(y)$ из (3.1) и (3.3) в (3.5), получим систему трех линейных алгебраических уравнений относительно A_n, B_n, F_n, решая которую, найдем

$$\begin{gathered} A_n = \frac{2q_0}{\pi Dn\gamma_n\delta_n f_{n1}\left(\frac{b}{2}\right)}\left\{\left[\omega - (1+\lambda_n^2\omega)\frac{\gamma_n^2-\delta_n^2}{(\gamma_n^2+\delta_n^2)^2}\right]\operatorname{sh}\alpha_n \sin\beta_n - \right. \\ \left. - \frac{2\gamma_n\delta_n(1+\lambda_n^2\omega)}{(\gamma_n^2+\delta_n^2)^2}\operatorname{ch}\alpha_n\cos\beta_n\right\}, \\ B_n = -\frac{2q_0}{\pi Dn\gamma_n\delta_n f_{n1}\left(\frac{b}{2}\right)}\left\{\left[\omega - (1+\lambda_n^2\omega)\frac{\gamma_n^2-\delta_n^2}{(\gamma_n^2+\delta_n^2)^2}\right]\operatorname{ch}\alpha_n\cos\beta_n + \right. \end{gathered} \tag{3.6}$$

$$+\frac{2\gamma_n\delta_n(1+\lambda_n^2\omega)}{(\gamma_n^2+\delta_n^2)^2}\operatorname{sh}\alpha_n\sin\beta_n\Big\}, \qquad F_n=0$$

где
$$\alpha_n=\frac{\gamma_n b}{2}, \qquad \beta_n=\frac{\delta_n b}{2},$$

$$f_{n1}(y)=\operatorname{ch}\alpha_n\operatorname{ch}\gamma_n y\cos\beta_n\cos\delta_n y+\operatorname{sh}\alpha_n\operatorname{sh}\gamma_n y\sin\beta_n\sin\delta_n y,$$

$$f_{n2}(y)=\operatorname{ch}\alpha_n\operatorname{sh}\gamma_n y\cos\beta_n\sin\delta_n y-\operatorname{sh}\alpha_n\operatorname{ch}\gamma_n y\sin\beta_n\cos\delta_n y.$$

После определения коэффициентов, пользуясь (2.3) и (3.3), для искомых функций $w(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ окончательно получим

$$w(x, y)=\frac{4q_0}{\pi D}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n(\gamma_n^2+\delta_n^2)^2}\Big\{(1+\lambda_n^2\omega)+$$

$$+\frac{1}{2\gamma_n\delta_n f_{n1}\left(\frac{b}{2}\right)}\Big[[\lambda_n^2-(1+\lambda_n^2\omega)(\gamma_n^2-\delta_n^2-\lambda_n^2)]f_{n2}(y)-$$

$$-2\gamma_n\delta_n(1+\lambda_n^2\omega)f_{n1}(y)\Big]\Big\}\sin\lambda_n x, \tag{3.7}$$

$$\Phi(x, y)\equiv 0.$$

Имея выражения w и Φ, легко найти все необходимые расчетные величины, на чем останавливаться не будем. Приведем лишь выражение максимального прогиба, имеющего место при $x=\frac{a}{2}$, $y=0$

$$w_{\max}=\frac{4q_0}{\pi D}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(\gamma_n^2+\delta_n^2)^2}\Big\{(1+\lambda_n^2\omega)-$$

$$-\frac{\operatorname{ch}\alpha_n\cos\beta_n}{2\gamma_n\delta_n(\operatorname{sh}^2\alpha_n+\cos^2\beta_n)}\Big[2(1+\lambda_n^2\omega)\gamma_n\delta_n+$$

$$+[\lambda_n^2-(1+\lambda_n^2\omega)(\gamma_n^2-\delta_n^2-\lambda_n^2)]\operatorname{th}\alpha_n\operatorname{tg}\beta_n\Big]\Big\}. \tag{3.8}$$

Из (3.7), как частный случай, легко получить:

а) выражение прогиба w^*, соответствующее решению рассматриваемой задачи по классической теории изгиба пластинок. Действительно, полагая в (3.7) $\omega=0$, получим

$$w^*(x, y)=$$

$$=\frac{4q_0}{\pi D}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n\left(\lambda_n^4+\frac{k}{D}\right)}\Big\{1+\frac{1}{f_{n1}\left(\frac{b}{2}\right)}\Big[\frac{\lambda_n^2}{\sqrt{\frac{k}{D}}}f_{n2}(y)-f_{n1}(y)\Big]\Big\}\sin\lambda_n x, \tag{3.9}$$

максимальное значение которого будет

$$w^*_{\max}=\frac{4q_0}{\pi D}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\left(\lambda_n^4+\frac{k}{D}\right)}\Big\{1-\frac{\operatorname{ch}\alpha_n\cos\beta_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n+\cos^2\beta_n}\Big[1+\frac{\lambda_n^2}{\sqrt{\frac{k}{D}}}\operatorname{th}\alpha_n\operatorname{tg}\beta_n\Big]\Big\};$$

(3.9*)

б) выражение $\overline{w}$ при отсутствии упругого основания, соответствующее задаче изгиба пластинки по теории [1], учитывающей деформации поперечных сдвигов и нормальных напряжений, действующих в плоскостях, параллельных срединной плоскости пластинки. Для этого в (3.7), выполняя предельный переход при $k \to 0$, получим

$$\overline{w}=\frac{4q_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left\{\left[1-\frac{\alpha_n \operatorname{th}\alpha_n+2}{2}\operatorname{ch}\lambda_n y+\frac{\lambda_n}{2\operatorname{ch}\alpha_n}y\operatorname{sh}\lambda_n y\right]+\right.$$

$$\left.+\,\omega\lambda_n^2\left(1-\frac{\operatorname{ch}\lambda_n y}{\operatorname{ch}\alpha_n}\right)\right\}\sin\lambda_n x, \tag{3.10}$$

$$\overline{w}_{\max}=\frac{4q_0a^4}{\pi^5 D}\left\{\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5}\left[1-\frac{\alpha_n\operatorname{th}\alpha_n+2}{2\operatorname{ch}\alpha_n}\right]+\right.$$

$$\left.+\,\omega\frac{\pi^2}{a^2}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_n}\right)\right\}.$$

Отметим, что этот результат был получен в работе [4], лишь с той разницей, что там учитывалось влияние только поперечных сдвигов;

в) выражение w° при отсутствии упругого основания, соответствующее классической теории изгиба пластинок [3]

$$w^\circ=\frac{4q_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left[1-\frac{\alpha_n\operatorname{th}\alpha_n+2}{2\operatorname{ch}\alpha_n}\operatorname{ch}\lambda_n y+\frac{\lambda_n}{2\operatorname{ch}\alpha_n}y\operatorname{sh}\lambda_n y\right]\sin\lambda_n y, \tag{3.11}$$

$$w^\circ_{\max}=\frac{4q_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5}\left[1-\frac{\alpha_n\operatorname{th}\alpha_n+2}{2\operatorname{ch}\alpha_n}\right].$$

В качестве численного примера приведем значения максимального прогиба для квадратной пластинки при отсутствии упругого основания, вычисленные по теории [1].

Выполняя вычисления с учетом $b=a$ и подставив значение ω по формуле (1.3) в (3.10), получим

$$\overline{w}_{\max}=w^\circ_{\max}\left\{1+\frac{1.8145}{1-\mu^2}\left[\frac{E}{G'}-\mu'(1+\mu)\frac{E}{E'}\right]\frac{h^2}{a^2}\right\}, \tag{3.12}$$

где $w^\circ_{\max}$ — максимальный прогиб квадратной пластинки, вычисленный по классической теории пластинок, определяемый формулой [3]

$$w^\circ_{\max}=0.00406\,\frac{q_0a^4}{D}. \tag{3.13}$$

В табл. 1 приводятся значения отношения максимального прогиба

(3.12) квадратной пластинки к соответствующей величине, вычисленной по классической теории пластинок (3.13) для различных значений отношений $\frac{E}{G'}$, $\frac{E}{E'}$ и $\frac{h}{a}$ при $\mu = \mu' = 0.25$.

Из табл. 1 следует, что основная часть поправки получается от учета влияния деформаций поперечных сдвигов.

В табл. 2 приведены результаты вычислений отношения $\frac{\overline{w}_{max}}{w^{\circ}_{max}}$ по формулам (3.8) и (3.9) для квадратной пластинки $a=b=100$ *см*, изготовленной из изотропного материала с $\mu = 0.25$, при различных соотношениях $\frac{k}{E}$ и $\frac{h}{a}$.

Таблица 1

Значения отношений $\frac{\overline{w}_{max}}{w^{\circ}_{max}}$

	$\frac{E}{E'}$	E/G': 0	2.5	5	10
$\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$	0	1	1.0484	1.0968	1.1935
	1	—	1.0423	—	—
	2	—	—	1.0847	1.1814
	5	—	—	1.0665	1.1633
$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$	0	1	1.1935	1.3871	1.7742
	1	—	1.1694	—	—
	2	—	—	1.3387	1.7258
	5	—	—	1.2661	1.6532

Таблица 2

$\frac{k}{E}$	h/a: 1/10	1/5
10^{-4}	1.0351	1.1853
$5 \cdot 10^{-4}$	1.0110	1.1537

Результаты вычислений показывают, что учет поперечных сдвигов естественно приводит к увеличению прогибов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 X 1965

ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ Ս. Գ.

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ելնելով [1] աշխատության մեջ բերված անիզոտրոպ սալերի ճշգրտված տեսությունից, լուծված է առաձգական հիմքի վրա գտնվող կամայական բեռնավորված ուղղանկյուն սալի ծռման խնդիրը, այն դեպքում, երբ սալի երկու հանդիպակաց եզրերը ազատ հենված են, իսկ մյուս երկուսը՝ ամրացված են տարբեր ձևերով։

Մասնավոր դեպքում լուծված է ամբողջ կոնտուրով ազատ հենված ուղղանկյուն սալի ծռման խնդիրը՝ հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ։

A. P. MELKONIAN

ON THE BENDING OF THE TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATES, LYING ON THE ELASTIC FOUNDATION

Summary

Proceeding from the more precise theory of anisotropic plates, proposed by S. A. Ambartzumian, which takes into account the influence of transversal displacements and normal strains at the planes parallel to the middle plane of the plate the problem of bending of a rectangular transversal isotropic plate lying on the elastic Vincler's foundation under the action of arbitrary transversal load in the case, when two opposite sides of the plate are freely supported, and the other two can be fastened arbitrarily is solved.

Particularly the problem of bending of rectangular plates, freely supported over the whole contour under the action of uniformly distributed load is solved. The results of calculations for some values of the ratio of elastic constants and relative thickness of plate are compared with the results of the classic theory of plates.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Мелконян А. П., Хачатрян А. А.* Об устойчивости прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. Прикл. механ., т. 2, вып. 2, 1966.
3. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1948.
4. *Мелконян А. П., Хачатрян А. А.* Об изгибе прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 1, 1965.