ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XX, № 1, 1967 Механика

В. М. АЛЕКСАНДРОВ

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА

Рассматривается задача о вдавливании силой Q штампа с произвольным основанием в поверхность $\theta=\alpha$ упругого клина ($-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha$, $0\leqslant r<\infty$). Силы трения между штампом и поверхностью клина отсутствуют. Другая грань клина $\theta=-\alpha$ жестко защемлена.

Задача решается в рамках плоской теории упругости. Как обычно, главной целью ставится определение давления в области контакта ($a\leqslant r\leqslant b$) штампа с поверхностью клина.

Насколько автору известно, впервые данная задача для частного случая $\alpha=\pi/4$ рассматривалась в работе Тонояна В. С. [1], где она была сведена к решению системы двух интегральных уравнений.

В данной работе получено приближенное решение указанной задачи для всех значений $0<\alpha<\pi$. Даны границы рационального практического использования найденных результатов.

Для определения приближенного решения производится специальная апроксимация ядра интегрального уравнения задачи, после чего с помощью обобщенного интегрального преобразования Мелера-Фока уравнение решается в замкнутом виде.

Попутно в работе получено замкнутое решение задачи о плоском кручении упругого слоя штампом.

§1. Интегральное уравнение контактной задачи для клина

Применяя к уравнениям Ламе и граничным условиям рассматриваемой задачи, записанным в полярной системе координат, интегральное преобразование Меллина по переменной r, сведем задачу к решению следующего интегрального уравнения относительно контактного давления

$$\int_a^b q(\rho)\,K(\ln\rho/r)\,d\rho=\pi\Delta\delta(r),\qquad(a\leqslant r\leqslant b),$$

$$K(t)=\int_0^\infty\frac{L(u,\alpha)}{u}\cos ut\,du,\qquad\left(\Delta=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\right),\tag{1.1}$$

$$L(u,\alpha)=\frac{2u\sin4\alpha+2\varkappa\,\mathrm{sh}\,4u\alpha}{2\varkappa\,\mathrm{ch}\,4u\alpha+2u^2+\varkappa^2+1-2u^2\cos4\alpha},\qquad(\varkappa=3-4\mu).\tag{1.2}$$

Преобразуем интегральное уравнение (1.1) введением новых переменных и обозначений по формулам

$$\begin{gathered}\xi = \lambda \ln \rho/a - 1, \qquad x = \lambda \ln r/a - 1, \qquad \lambda = 2(\ln b/a)^{-1}, \\ \rho q(\rho) = \varphi(\xi), \qquad \Delta\theta\delta(r) = f(x).\end{gathered} \tag{1.3}$$

Будем иметь

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x), \qquad |x| \leqslant 1. \tag{1.4}$$

Отметим некоторые свойства функции $L(u, \alpha)$ вида (1.2):
а) при $u \to \infty$ и всех α

$$L(u, \alpha) \to 1 + O(e^{-4u\alpha}), \tag{1.5}$$

б) при $u \to 0$ и всех α

$$L(u, \alpha) \to A(\alpha) u + O(u^3), \qquad A(\alpha) = 2(\sin 4\alpha + 4\alpha\varkappa)(\varkappa + 1)^{-2}. \tag{1.6}$$

В соответствии с этими свойствами апроксимируем функцию $L(u, \alpha)$ выражением $\operatorname{th} A(\alpha) u$. Максимальные относительные ошибки этой апроксимации для $\varkappa = 1.8$ ($\mu = 0.3$) и различных значений α даны в табл. 1.

Таблица 1

α в град.	Ошибка в %	α в град.	Ошибка в %
45	8	115	1
55	4	125	1
65	1	135	1
75	2	145	1
85	2	155	1
95	2	165	1
105	1	175	1

С учетом указанной апроксимации представим ядро $K(t)$ интегрального уравнения (1.4) в виде [2]

$$K(t) = -\ln\left|\operatorname{th}\frac{\pi t}{4A(\alpha)}\right|. \tag{1.7}$$

Решение интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7) может быть получено в замкнутом виде (см. ниже) и, очевидно, будет являться приближенным решением рассматриваемой контактной задачи для упругого клина.

Что касается точности такого приближенного решения, то можно доказать следующее: погрешность решения не превосходит погрешности используемой апроксимации функции $L(u, \alpha)$.

Произведем в интегральном уравнении (1.4) с ядром (1.7) замену переменных

$$\xi' = e^{\pi\xi/2A\lambda}, \quad x' = e^{\pi x/2A\lambda} \tag{1.8}$$

и введем обозначения

$$\begin{gathered}c = e^{-\pi/2A\lambda}, \quad d = e^{\pi/2A\lambda}, \\ \varphi^*(\xi') = \varphi(\xi) e^{-\pi\xi/2A\lambda}, \quad f^*(x') = \frac{\pi}{2A\lambda} f(x).\end{gathered} \tag{1.9}$$

Получим

$$-\int_{c}^{d} \varphi^*(\xi') \ln \left| \frac{\xi' - x'}{\xi' + x'} \right| d\xi' = \pi \Delta f^*(x'), \qquad (c \leqslant x' \leqslant d). \tag{1.10}$$

Как известно, уравнение (1.10) является интегральным уравнением антисимметричной задачи о вдавливании двух штампов в упругую полуплоскость [3]. Решение его может быть получено в замкнутом виде в форме, содержащей сингулярные интегралы [3], а также в форме, не содержащей сингулярных интегралов, методом работы [4].

Мы ниже получим решение интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7) во второй форме, как более удобной для практических приложений, путем решения эквивалентного ему парного интегрального уравнения относительно трансформанты Фурье $\Phi(\beta)$ функции $\varphi(x)$, которое имеет вид

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th}[A(\alpha)\beta\lambda]\, \beta^{-1} e^{-i\beta x} \Phi(\beta)\, d\beta = 2\pi f(x), & |x| \leqslant 1, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\beta) e^{-i\beta x} d\beta = 0, & |x| > 1, \end{cases} \tag{1.11}$$

здесь

$$\Phi(\beta) = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) e^{i\beta\xi} d\xi, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\beta) e^{-ix\beta} d\beta = \begin{cases} \varphi(x), & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Заметим, что рассматриваемая задача может быть разбита на „четный“ и „нечетный“ варианты, соответствующие разложению функций $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\Phi(\beta)$ на четные с „+“ и нечетные с „—“ слагаемые.

Для „четного“ варианта задачи формулы (1.11) и (1.12) представимы в форме

$$\begin{cases} \int\limits_{0}^{\infty} \Phi_+(\beta) \operatorname{th}(A\beta\lambda) \cos\beta x \beta^{-1} d\beta = \pi f_+(x), & x \leqslant 1, \\ \int\limits_{0}^{\infty} \Phi_+(\beta) \cos\beta x d\beta = 0, & x > 1, \end{cases} \tag{1.13}$$

здесь

$$\Phi_+(\beta) = 2\int_{0}^{1} \varphi_+(\xi) \cos\beta\xi d\xi, \quad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \Phi_+(\beta) \cos\beta x\, d\beta = \begin{cases} \varphi_+(x), & x \leqslant 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases} \tag{1.14}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что функция $f_+(x)$ имеет непрерывную первую производную. Тогда продифференцируем обе части первого уравнения (1.13) по x и введем следующие обозначения:

$$\beta=\frac{\pi\gamma}{A\lambda},\quad x=\frac{A\lambda y}{\pi},\quad b=\frac{\pi}{A\lambda},\quad \Phi_{+}\left(\frac{\gamma\pi}{A\lambda}\right)=\Psi(\gamma),\quad f_{+}\left(\frac{A\lambda y}{\pi}\right)=g(y). \tag{1.15}$$

Будем иметь

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \Psi(\gamma)\,\mathrm{th}\,\pi\gamma\sin\gamma y\,d\gamma=-\pi g'(y),\quad y\leqslant b,\\ &\int_0^\infty \Psi(\gamma)\cos\gamma y\,d\gamma=0,\quad y>b.\end{aligned}\right. \tag{1.16}$$

Отметим, что парное интегральное уравнение (1.16), очевидно, эквивалентно сингулярному интегральному уравнению, которое получается дифференцированием по x обоих частей уравнения (1.4) с ядром (1.7) и правой частью $\pi f_{+}(x)$.

§ 2. Решение парного интегрального уравнения (1.16)

Ниже будет дано решение уравнения (1.16), основанное на использовании обобщенного преобразования Мелера-Фока. Отметим, что интегральное преобразование Мелера-Фока ранее использовалось при решении парных интегральных уравнений в работах [5, 6, 7], обобщенное преобразование Мелера-Фока — в работе [8].

Предварительно приведем перечень необходимых для дальнейшего формул.

1. Интегральные представления присоединенных функций конуса

$$P^{\mu}_{-1/2+i\gamma}(\mathrm{ch}\,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{sh}^{\mu}t}{\Gamma(1/2-\mu)}\int_0^t\frac{\cos\gamma y\,dy}{(\mathrm{ch}\,t-\mathrm{ch}\,y)^{\mu+1/2}},\quad (\alpha>0,\ \mathrm{Re}\,\mu<1/2),$$

$$P^{\mu}_{-1/2+i\gamma}(\mathrm{ch}\,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{sh}^{\mu}t}{\Gamma(1/2-\mu)}\left\{\sin\pi\mu\int_t^\infty\frac{\cos\gamma y\,dy}{(\mathrm{ch}\,y-\mathrm{ch}\,t)^{\mu+1/2}}+\right.$$

$$\left.+\cos\pi\mu\,\mathrm{cth}\,\pi\gamma\int_t^\infty\frac{\sin\gamma y\,dy}{(\mathrm{ch}\,y-\mathrm{ch}\,t)^{\mu+1/2}}\right\},\quad (\alpha>0,\ |\mathrm{Re}\,\mu|<1/2). \tag{2.1}$$

Первая из формул (2.1) имеется в [2], вторая получена автором.

2. Интегральные представления присоединенных функций конуса при $\mu=-1$. Полагая в (2.1) $\mu=-1$, получим

$$P^{-1}_{-1/2+i\gamma}(\mathrm{ch}\,t)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\mathrm{sh}^{-1}t\int_0^t\cos\gamma y\,(\mathrm{ch}\,t-\mathrm{ch}\,y)^{1/2}dy,$$

$$P^{-1}_{-1/2+i\gamma}(\mathrm{ch}\,t)=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\mathrm{sh}^{-1}t\,\mathrm{cth}\,\pi\gamma\int_t^\infty\sin\gamma y\,(\mathrm{ch}\,y-\mathrm{ch}\,t)^{1/2}dy. \tag{2.2}$$

Отметим, что вторая формула (2.2) получена формально и может быть обоснована в рамках теории обобщенных функций.

На основании (2.2) найдем другие интегральные представления для $P^{-1}_{-1/2+i\gamma}(\operatorname{ch} t)$, которые и будут нами использованы в дальнейшем

$$P^{-1}_{-1/2+i\gamma}(\operatorname{ch} t)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}(\gamma \operatorname{sh} t)^{-1}\int_0^t\frac{\sin \gamma y \operatorname{sh} y}{\sqrt{\operatorname{ch} t-\operatorname{ch} y}}\,dy,$$
$$P^{-1}_{-1/2+i\gamma}(\operatorname{ch} t)=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}(\gamma \operatorname{sh} t)^{-1}\operatorname{cth}\pi\gamma\int_t^\infty\frac{\cos \gamma y \operatorname{sh} y}{\sqrt{\operatorname{ch} y-\operatorname{ch} t}}\,dy. \tag{2.3}$$

Вторая формула (2.3) также носит формальный характер.

3. Обобщенное интегральное преобразование Мелера-Фока [8]

$$\psi(t)=\int_0^\infty \gamma \operatorname{th}\pi\gamma\,\Psi(\gamma)\,P^{-m}_{-1/2+i\gamma}(\operatorname{ch} t)\,d\gamma,\quad (0\leqslant t<\infty),$$
$$\Psi(\gamma)=(-1)^m\int_0^\infty \psi(t)\,P^{m}_{-1/2+i\gamma}(\operatorname{ch} t)\operatorname{sh} t\,dt,\quad (\gamma\geqslant 0). \tag{2.4}$$

4. Разрывные интегралы Мелера [5]

$$\int_0^\infty P_{-1/2+i\gamma}(\operatorname{ch} t)\cos\gamma y\,d\gamma=\begin{cases}[2(\operatorname{ch} t-\operatorname{ch} y)]^{-1/2} & 0<y<t,\\ 0 & 0<t<y\end{cases}$$
$$\int_0^\infty \operatorname{th}\pi\gamma\,P_{-1/2+i\gamma}(\operatorname{ch} t)\sin\gamma y\,d\gamma=\begin{cases}[2(\operatorname{ch} y-\operatorname{ch} t)]^{-1/2} & 0<t<y.\\ 0 & 0<y<t\end{cases} \tag{2.5}$$

5. Интегралы

$$\int_{-t}^{t}\frac{\ln\left|\operatorname{th}\dfrac{t+y}{4}\right|dy}{\sqrt{\operatorname{ch} t-\operatorname{ch} y}}=-\frac{\pi\sqrt{2}}{\operatorname{ch} t/2}K\left(\sqrt{1-\operatorname{th}^2 t/2}\right),$$
$$\int_{-t}^{t}\frac{dy}{\sqrt{\operatorname{ch} t-\operatorname{ch} y}}=\frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch} t/2}K(\operatorname{th} t/2). \tag{2.6}$$

Умножим теперь первое из соотношений (1.16) на $\operatorname{sh} y(\operatorname{ch} t-\operatorname{ch} y)^{-1/2}dy$ и проинтегрируем по y от 0 до t, второе соотношение (1.16) умножим на $\operatorname{sh} y(\operatorname{ch} y-\operatorname{ch} t)^{-1/2}dy$ и проинтегрируем по y от t до ∞. Совершив затем перестановку интегралов в полученных выражениях и воспользовавшись формулами (2.3), получим следующее парное интегральное уравнение:

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty \Psi(\gamma)\,\mathrm{th}\,\pi\gamma P^{-1}_{-1/2+i\gamma}(\mathrm{ch}\,t)\,\gamma d\gamma = \psi_*(t), & t \leqslant b, \\ \int\limits_0^\infty \Psi(\gamma)\,\mathrm{th}\,\pi\gamma P^{-1}_{-1/2+i\gamma}(\mathrm{ch}\,t)\,\gamma d\gamma = 0, & t > b, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\left(\psi_*(t) = -\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{sh}\,t}\int\limits_0^t \frac{\mathrm{sh}\,y g'(y)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,t - \mathrm{ch}\,y}}\,dy\right).$$

Применяя к (2.7) обобщенное интегральное преобразование Мелера-Фока (2.4) при $m = 1$, найдем частное решение неоднородного парного интегрального уравнения (1.16) в виде

$$\Psi(\gamma) = -\int\limits_0^b P^1_{-1/2+i\gamma}(\mathrm{ch}\,t)\,\psi_*(t)\,\mathrm{sh}\,t\,dt. \tag{2.8}$$

Посмотрим, имеет ли однородное уравнение (1.16) какое-либо решение. Полагая $g'(y) \equiv 0$ и используя интегралы (2.5), без труда убедимся, что $\Psi(\gamma) = CP_{-1/2+i\gamma}(\mathrm{ch}\,b)$ дает нам решение однородного парного интегрального уравнения (1.16).

Общее решение уравнения (1.16) можно теперь представить в виде

$$\Psi(\gamma) = [C - \psi_*(b)\,\mathrm{sh}\,b]\,P_{-1/2+i\gamma}(\mathrm{ch}\,b) + \int\limits_0^b [\psi_*(t)\,\mathrm{sh}\,t]'\,P_{-1/2+i\gamma}(\mathrm{ch}\,t)\,dt. \tag{2.9}$$

§ 3. Приближенное решение задачи

Возвращаясь в (2.9) к старым переменным по формулам (1.15) и учитывая еще соотношения

$$t = \frac{\pi\tau}{A\lambda}, \qquad \psi_*(t) = \psi_+\left(\frac{A\lambda t}{\pi}\right), \tag{3.1}$$

будем иметь

$$\Phi_+(\beta) = \left[C - \psi_+(1)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{A\lambda}\right] P_{-1/2+iA\lambda\beta/\pi}\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi}{A\lambda}\right) +$$

$$+ \int\limits_0^1 \left[\psi_+(\tau)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda}\right]' P_{-1/2+iA\lambda\beta/\pi}\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda}\right) d\tau, \tag{3.2}$$

где

$$\psi_+(\tau) = -\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda}} \int\limits_0^\tau \frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{A\lambda} f'_+(x)\,dx}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda} - \mathrm{ch}\,\frac{\pi x}{A\lambda}}}. \tag{3.3}$$

Заметим, что $\Phi_+(\beta)$ в виде (3.2), (3.3) удовлетворяет первому соотношению парного интегрального уравнения (1.13) лишь с точностью до постоянной, второму — полностью.

Найдем теперь по формуле (1.14) функцию $\varphi_+(x)$. Представляя (1.14) $\Phi_+(\beta)$ в виде (3.2) и используя первый из интегралов (2.5), будем иметь

$$\varphi_+(x)=\frac{\left[C-\psi_+(1)\operatorname{sh}\frac{\pi}{A\lambda}\right]}{A\lambda\sqrt{2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{A\lambda}-\operatorname{ch}\frac{\pi x}{A\lambda}\right)}}+$$

$$+\frac{1}{A\lambda}\int\limits_x^1\frac{\left[\psi_+(\tau)\operatorname{sh}\frac{\pi\tau}{A\lambda}\right]' d\tau}{\sqrt{2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi\tau}{A\lambda}-\operatorname{ch}\frac{\pi x}{A\lambda}\right)}}. \tag{3.4}$$

Функция $\varphi_+(x)$ в форме (3.4) удовлетворяет интегральному уравнению (1.4) с ядром (1.7) и правой частью $\pi f_+(x)$ с точностью до постоянной.

Чтобы функции $\Phi_+(\beta)$ и $\varphi_+(x)$ являлись точными решениями интегральных уравнений (1.13) и (1.4) с ядром (1.7), выберем соответствующим образом, остававшуюся до сих пор произвольной, постоянную C.

Используя второй интеграл (2.6) и формулу (3.4), получим следующее соотношение:

$$P=2\int\limits_0^1\varphi_+(x)\,dx=\frac{2}{\pi}C\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{2A\lambda}\right)^{-1}K\left(\operatorname{th}\frac{\pi}{2A\lambda}\right)-$$

$$-\frac{2}{A\lambda}\int\limits_0^1\psi_+(\tau)\operatorname{ch}\frac{\pi\tau}{2A\lambda}\left[E\left(\operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2A\lambda}\right)-K\left(\operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2A\lambda}\right)\right]d\tau. \tag{3.5}$$

Рассмотрим теперь частный случай $f_+(x)=1$. Легко видеть, что тогда $\psi_+(\tau)=0$ и формула (3.4) принимает вид

$$\varphi_+^0(x)=\frac{C}{A\lambda\sqrt{2}}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{A\lambda}-\operatorname{ch}\frac{\pi x}{A\lambda}\right)^{-1/2}.$$

Подставляя $\varphi_+^0(x)$ в этой форме в левую часть интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7) и учитывая, что интеграл, стоящий слева, есть некоторая постоянная при любом $x\in[-1,\ 1]$, в частности, при $x=-1$, будем иметь

$$-\frac{C}{A\lambda}\int\limits_{-1}^1\frac{\ln\left[\operatorname{th}\frac{\pi(1+\xi)}{4A\lambda}\right]d\xi}{\sqrt{2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{A\lambda}-\operatorname{ch}\frac{\pi\xi}{A\lambda}\right)}}=\pi. \tag{3.6}$$

Вычисляя интеграл в (3.6) по первой формуле (2.6), найдем постоянную C для частного случая $f_+(x)\equiv 1$ и представим $\varphi_+^0(x)$ в виде

$$\varphi_+(x)=\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi}{2A\lambda}}{A\lambda K\left(\sqrt{1-\mathrm{th}^2\dfrac{\pi}{2A\lambda}}\right)\sqrt{2\left(\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi}{A\lambda}-\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi\xi}{A\lambda}\right)}}. \tag{3.7}$$

На основании (3.7) и первой формулы (1.20) работы [9] получим другое представление для величины P

$$P=\frac{2\pi\,\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi}{2A\lambda}}{A\lambda K\left(\sqrt{1-\mathrm{th}^2\dfrac{\pi}{2A\lambda}}\right)}\int_0^1\frac{f_+(x)\,dx}{\sqrt{2\left(\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi}{A\lambda}-\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi x}{A\lambda}\right)}}. \tag{3.8}$$

Сравнивая формулы (3.5) и (3.8), получим выражение для постоянной C в общем случае функции $f_+(x)$.

Итак, формулы (3.3), (3.4), (3.5) и (3.8) дают замкнутое решение интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7) для „четного" варианта задачи[1].

Переходя в формулах (3.3)—(3.5) и (3.8) к старым обозначениям и переменным в соответствии с (1.3) и учитывая еще, что

$$Q=\int_a^b q(r)\,dr=\frac{2}{\lambda}\int_0^1\varphi_+(x)\,dx=\frac{P}{\lambda}, \tag{3.9}$$

получим приближенное решение „четного варианта" рассматриваемой контактной задачи для упругого клина. В целях сокращения приведем лишь окончательную форму этого приближенного решения для част-

[1] Отметим, что к интегральному уравнению (1.4) с ядром (1.7) сводится также задача о кручении упругого слоя, жестко соединенного с недеформируемым основанием, бесконечным полосовым штампом. Между поверхностью штампа и слоя предполагается наличие полного сцепления. К штампу приложена сила T, отнесенная к единице его длины и направленная по его образующей. Замечая, что функция $f(x)$ будет равна $G\varepsilon$, где G — модуль сдвига материала слоя, ε — перемещение штампа в направлении его образующей, вызванное действием силы T, на основании формул (3.3)—(3.5) и (3.8) получим замкнутое решение этой смешанной задачи в виде ($A=1$)

$$\varphi(x)=\frac{\pi G\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi}{2\lambda}}{hK'\left(\mathrm{th}\,\dfrac{\pi}{2\lambda}\right)\sqrt{2\left(\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi}{\lambda}-\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi x}{\lambda}\right)}},\qquad |x|\leqslant 1,$$

$$T=2G\varepsilon K\left(\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2\lambda}\right)\left[K'\left(\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2\lambda}\right)\right]^{-1}.$$

Здесь $\varphi(x)$ — контактные касательные напряжения между штампом и слоем, $\lambda=h/a$, h — толщина слоя, a — полуширина полосового штампа.

ного случая штампа с плоским основанием и при условии его поступательного перемещения под действием силы Q на величину δ.

Для этого случая $f(x) = \Delta\lambda\delta$, и мы получаем

$$q(r) = \frac{\pi\Delta\delta}{rAK'\left(\operatorname{th}\frac{\pi}{2A\lambda}\right)\left(1+\operatorname{th}\frac{\pi}{2A\lambda}\right)\sqrt{\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^{\pi/\lambda}\right]\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^{\pi/\lambda}\right]}}, \tag{3.10}$$

$$Q = 2\Delta\delta K\left(\operatorname{th}\frac{\pi}{2A\lambda}\right)\left[K'\left(\operatorname{th}\frac{\pi}{2A\lambda}\right)\right]^{-1}, \tag{3.11}$$

здесь $K'(k) = K(\sqrt{1-k^2})$.

Приведем еще формулу для расстояния H от вершины клина, на котором должна быть приложена к штампу сила Q, чтобы он перемещался поступательно. Это расстояние, очевидно, может быть найдено из следующего условия статики

$$M = QH = \int\limits_a^b q(r)\,r\,dr. \tag{3.12}$$

Подставляя в (3.12) функцию $q(r)$ в виде (3.10), (3.11), после преобразований и вычисления интеграла [2] получим

$$H = \frac{\pi\sqrt{ab}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2A\lambda}}{2K\left(\operatorname{th}\frac{\pi}{2A\lambda}\right)} P_{-1/2+\lambda}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{A\lambda}\right), \tag{3.13}$$

здесь $P_\nu(x)$ — функция Лежандра.

Перейдем теперь к определению замкнутого решения интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7) для „нечетного" варианта ($f(x) = f_-(x)$).

Предварительно докажем, что оно может быть получено дифференцированием по x определенным образом построенного решения для некоторого „четного" случая.

Пусть $\varphi_+(\xi)$ есть решение интегрального уравнения (1.4) с правой частью вида

$$f_+(x) = \int\limits_0^x f_-(x)\,dx + D. \tag{3.14}$$

Выберем постоянную D таким образом, чтобы $\varphi_+(1) = 0$.

Продифференцируем теперь обе части интегрального уравнения (1.4) для случая (3.14) по x. Произведя затем в левой части интегрирование по частям, без труда убедимся, что

$$\varphi_-(\xi) = \varphi'_+(\xi). \tag{3.15}$$

В соответствии с изложенным найдем обращающееся в нуль при $x = \pm 1$ решение „четного“ варианта интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7). На основании формулы (3.4) без труда получим

$$\varphi_+(x) = \frac{1}{A\lambda}\int\limits_x^1 \frac{\left[\psi_+(\tau)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda}\right]'}{\sqrt{2\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda}-\mathrm{ch}\,\frac{\pi x}{A\lambda}\right)}}\,d\tau. \tag{3.16}$$

Решение (3.16) имеет место при выполнении условия

$$C - \psi_+(1)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{A\lambda} = 0, \tag{3.17}$$

которое накладывает ограничение на функцию $f_+(x)$. В случае (3.14) условие (3.17) служит для определения постоянной D.

Теперь решение для „нечетного“ варианта в соответствии с (3.15) представим в виде

$$\varphi_-(x) = \frac{1}{A\lambda}\,\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 \frac{\psi_-(\tau)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda}}{\sqrt{2\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda}-\mathrm{ch}\,\frac{\pi x}{A\lambda}\right)}}\,d\tau, \tag{3.18}$$

где

$$\psi_-(\tau) = \left(\mathrm{sh}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda}\right)^{-1}\left[\psi_+(\tau)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda}\right]' = -\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda}}\,\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^\tau \frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{A\lambda}\,f_-(x)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\frac{\pi\tau}{A\lambda}-\mathrm{ch}\,\frac{\pi x}{A\lambda}}}\,dx. \tag{3.19}$$

Переходя в формулах (3.18), (3.19) к старым обозначениям и переменным в соответствии с (1.3), получим приближенное решение „нечетного варианта“ рассматриваемой контактной задачи для упругого клина. Учитывая, что указанные преобразования производятся достаточно просто, в целях сокращения окончательные формулы не приводим.

Таблица 2

α в град.	$2A(\alpha)$	α в град.	$2A(\alpha)$
45	2.885	112.5	7.468
52.5	3.238	120	7.915
60	3.626	127.5	8.302
67.5	4.073	135	8.655
75	4.588	142.5	9.009
82.5	5.162	150	9.396
90	5.770	157.5	9.843
97.5	6.379	165	10.358
105	6.953	172.5	10.932

В заключение работы приведем таблицу зависимости величины A от угла α при $\varkappa=1.8$ ($\nu = 0.3$). Эта таблица облегчает использование полученных выше приближенных решений.

Отметим, что приближенные решения интегрального уравнения (1.4), к которому была сведена рассмотренная контактная задача для упругого клина, также могли бы быть получены методом „больших λ", изложенным в работе [9], и методом „малых λ" [10]. Вместе они обеспечивают перекрытие всего диапазона изменения параметра λ простыми и надежными формулами.

Ростовский государственный
университет

Поступила 25 VI 1966

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԵՊԻ ՄԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է առաձգական սեպի մակերևույթի մեջ շտամպի ներս հրման հարթ խնդիրը, երբ սեպի մի եզրը կոշտ ամրակցված է։ Ենթադրվում է, որ կոնտակտի գծի վրա շփման ուժերը բացակայում են։

Խնդիրը հանգեցված է ինտեգրալ հավասարման, որը լուծվում է փակ տեսքով, մտցնելով կորիզի հատուկ ապրոքսիմացիա։ Հավասարման լուծման համար օգտագործվում է Մելլեր-Ֆոկի ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխության ապարատը։

Տրված են ստացված արդյունքների ռացիոնալ օգտագործման սահմանները։

V. M. ALEXANDROV

ON THE CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC WEDGE

Summary

A plane problem is examined on the pressing of a punch into the side of an elastic wedge when its other side is clamped. The forces of friction on the contact line are supposed to be absent.

The problem is reduced to an integral equation which is solved in a closed form after the introduction of a special approximation of the kernel. The generalized integral transformation of Mehler-Fock is used to solve the equation.

The boundaries of applicability of the obtained results are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тоноян В. С.* Плоская контактная задача для упругой четверть-плоскости с неподвижной вертикальной кромкой. Докл. АН АрмССР, т. 37, № 5, 1963.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
3. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехтеориздат, 1949.
4. *Ростовцев Н. А.* О некоторых случаях контактной задачи. УМЖ, т. 6, № 3, 1954.

5. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. Инж.-физ. ж., т. 6, № 10, 1963.
6. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной. ПМ АН УССР, т. 1, вып. 10, 1965.
7. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
8. *Руховец А. Н., Уфлянд Я. С.* Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости. ПММ, т. 30, вып. 2, 1966.
9. *Александров В. М.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, т. 26, вып. 5, 1962.
10. *Александров В. М.* К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, т. 27, вып. 5, 1963.