

Ю. К. ЗАРЕЦКИЙ

ПОЛЗУЧЕСТЬ СЛОЯ ДВУХФАЗНОГО ГРУНТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ МЕСТНОЙ НАГРУЗКИ

§ 1. Постановка задачи

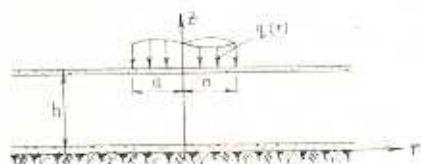
Рассматривается напряженно-деформированное состояние двухфазного грунта слоя конечной мощности h , находящегося под действием нагрузки $q(r)$, распределенной по площади круга радиуса $r = a$ (фиг. 1).

Система уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние двухфазного грунта и учитывающая одновременно фильтрационные свойства и свойства ползучести „скелета“ дается в форме [1]

$$\bar{\mu} \Delta^2 u_i(t) + (\bar{\nu} + \bar{\lambda}) u_{i,kk}(t) - \bar{\beta} p_{,i}(t),$$

$$(i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

$$u_{k,k} = \frac{k}{\gamma_w} \Delta^2 p - \frac{3n_{c1}}{2\alpha} \frac{\partial p}{\partial t}.$$



Фиг. 1. Расчетная схема.

Здесь $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ — интегральные операторы Вольтерры вида

$$\bar{\mu} y(t) = \mu_0 \left[y(t) - \int_0^t K_D(t-\tau) y(\tau) d\tau \right],$$

$$\bar{\lambda} y(t) = \lambda_0 \left[y(t) - \int_0^t K_0(t-\tau) y(\tau) d\tau \right], \quad (1.2)$$

$$\bar{\nu} = \frac{1}{3} (\bar{\lambda} - 2\bar{\mu}), \quad \bar{\beta} = \frac{\beta_0}{\alpha} \bar{\lambda}.$$

Кроме того, λ_0 , $\mu_0 = G_0$ — постоянные Ламе, k — коэффициент фильтрации, γ_w — объемный вес воды, n — пористость, α — объемный модуль сжимаемости внутривязкой жидкости.

Рассматриваемый слой грунта мощности h характеризуется двухсторонним дренажем и подстилается скальным основанием.

В соответствии с принятой системой цилиндрических координат граничные условия задачи формулируются следующим образом:

$$1. \quad \text{при } z = 0 \quad u_z = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad p = 0, \quad (1.3)$$

$$2. \quad \text{при } z = h \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -q(r), \quad p = 0. \quad (1.4)$$

Отметим, что совершенно аналогично может быть рассмотрен случай „прилипания“ слоя грунта к скальному основанию (при $z = 0$ смещения $u_i = 0$) и случай одностороннего дренажа ($\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ при $z = 0$).

В дальнейшем для получения замкнутого решения примем простейшие предположения относительно свойств двухфазных грунтов основания. Будем считать, что внутриводная жидкость несжимаема ($\alpha_w \rightarrow \infty$), а ползуность „скелета“ характеризуется постоянством во времени коэффициента Пуассона $\nu = \text{const}$. Последнее соответствует условию равенства ядер операторов \bar{u} и \bar{z} , т. е. $K_D(t) = K_0(t) = K(t)$ [2]. Резольвенту этого ядра будем обозначать $Q(t)$.

Решение системы уравнений (1.1) представим в виде

$$u_i = (1 + \bar{Q}) u_i^{(0)} + u_i^{(1)}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \varepsilon_{ij}^{(1)}, \quad (1.5)$$

где $u_i^{(0)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ соответствуют мгновенному состоянию двухфазного грунта основания и удовлетворяют всем граничным условиям,

$u_i^{(1)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ соответствуют состоянию при $t > 0$ и удовлетворяют нулевым граничным условиям.

§ 2. Мгновенное напряженное состояние консолидируемого грунта

Для получения выражений мгновенного состояния $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ и $u_i^{(0)}$ двухфазного грунта необходимо, как это следует из (1.1) и (1.5), в соответствующей упругой задаче положить коэффициент Пуассона равным 0.5.

На основании работ [3–6] и условия $\nu = 0.5$ будем иметь

$$\varepsilon_{zz}^{(0)} = -\frac{1}{h^2} \int_0^z A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) \frac{(\text{sh } \lambda + \lambda \text{ ch } \lambda) \text{ch}\left(\frac{z}{h} \lambda\right) - \left(\lambda \frac{z}{h}\right) \text{sh } \lambda \text{sh}\left(\lambda \frac{z}{h}\right)}{\lambda + \text{sh } \lambda \text{ch } \lambda} d\lambda,$$

$$u_z^{(0)} = \frac{1}{2G_0 h} \int_0^z A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) \frac{\text{sh}^2 \lambda}{\lambda + \text{sh } \lambda \text{ch } \lambda} J_0\left(\frac{r}{h} \lambda\right) d\lambda. \quad (2.1)$$

Здесь обозначено через

$$A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) = \int_0^a q(\xi) J_0\left(\frac{\xi}{h} \lambda\right) \xi d\xi. \quad (2.2)$$

Сумма главных напряжений мгновенной задачи выражается в форме

$$\sigma^{(0)} = \frac{\varepsilon_{zz}^{(0)} + \varepsilon_{rr}^{(0)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}}{3} = -\frac{1}{h^2} \int_0^z A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) \frac{\text{sh } \lambda \text{ch}\left(\frac{z}{h} \lambda\right)}{\lambda + \text{sh } \lambda \text{ch } \lambda} J_0\left(\frac{r}{h} \lambda\right) \lambda d\lambda. \quad (2.3)$$

§ 3. Определение порового давления

Функция порового давления

$$P(r, z, t) = p(r, z, t) - \int_0^t K(t, \tau) p(r, z, \tau) d\tau \quad (3.1)$$

определяется, исходя из (1.1), как решение уравнения

$$c \Delta^2 P = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad c = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{k z_0}{\gamma_0 \rho_0} \quad (3.2)$$

при граничных условиях

$$P = p = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = h \quad (3.3)$$

и начальном условии

$$P^{(0)} = p^{(0)} = - \frac{z^{(0)}}{z_0} = - \frac{1}{z_0 h^2} \int_0^{\tilde{z}} A \left(\frac{\alpha}{h} \lambda \right) \frac{\text{sh } \lambda \text{ ch} \left(\frac{z}{h} \lambda \right)}{\lambda + \text{sh } \lambda \text{ ch } \lambda} J_0 \left(\frac{r}{h} \lambda \right) \lambda d\lambda. \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.2) записывается в форме

$$P(r, z, t) = \int_0^{\tilde{z}} r' dr' \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' \int_0^h \Gamma(r, r', \theta, \theta', z, z', t) p^{(0)}(r', z') dz'. \quad (3.5)$$

Функция Грина $\Gamma(r, r', \theta, \theta', z, z', t)$ данной задачи может быть представлена в виде выражения

$$\Gamma(r, r', \theta, \theta', z, z', t) = \frac{1}{\pi h} \left| \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{h} z \sin \frac{n\pi}{h} z' e^{-\frac{n^2-1}{h^2} ct} \right| \times \\ \times \int_0^{\tilde{z}} e^{-\alpha^2 ct} J_0(\alpha R) \alpha d\alpha, \quad (3.6)$$

где

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta').$$

Подставляя (3.6), (3.4) и (2.3) в (3.5) и учитывая значения следующих квадратур

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} J_0(\alpha R) d\theta' = 2\pi J_0(\alpha r) J_0(\alpha r'),$$

$$2. 2\pi \int_0^{\tilde{z}} e^{-\alpha^2 ct} J_0(\alpha r) J_0(\alpha r') \alpha d\alpha = \frac{\pi}{ct} e^{-\frac{r^2-r'^2}{4ct}} I_0\left(\frac{rr'}{2ct}\right),$$

$$3. \frac{\pi}{ct} \int_0^{\sqrt{\frac{r^2 - r'^2}{4ct}}} e^{-\frac{\lambda^2 + n^2 z'^2}{h^2} ct} I_0\left(\frac{rr'}{2ct}\right) J_0\left(\frac{\lambda}{h} r'\right) r' dr' = 2\pi e^{-\frac{\lambda^2}{h^2} ct} J_0\left(\frac{r}{h} \lambda\right),$$

$$4. \int_0^h \sin\left(\frac{n\pi}{h} z'\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{h} z'\right) dz' = h \frac{n\pi}{\lambda^2 + (n\pi)^2} (1 + \operatorname{ch} \lambda),$$

(при $n = 1, 3, \dots$),

получим окончательно

$$P(r, z, t) = \frac{2\pi}{\beta_0 h^2} \int_0^{\sqrt{\frac{r^2 - r'^2}{4ct}}} A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) \frac{\operatorname{sh} \lambda (1 + \operatorname{ch} \lambda)}{\lambda + \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda} J_0\left(\frac{r}{h} \lambda\right) \times \\ \times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n \sin \frac{n\pi}{h} z}{\lambda^2 + (n\pi)^2} e^{-\frac{\lambda^2 + n^2 z'^2}{h^2} ct} \lambda d\lambda. \quad (3.7)$$

Теперь уже нетрудно определить и поровое давление, если разрешить интегральное уравнение (3.1) относительно $p(r, z, t)$. Резольвенту уравнения (3.1) будем обозначать $Q(t, z)$.

Тогда будем иметь

$$p(r, z, t) = \frac{2\pi}{\beta_0 h^2} \int_0^{\sqrt{\frac{r^2 - r'^2}{4ct}}} A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) \frac{\operatorname{sh} \lambda (1 + \operatorname{ch} \lambda)}{\lambda + \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda} \times \\ \times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n \sin \frac{n\pi}{h} z}{\lambda^2 + (n\pi)^2} \tau_n(t, t) \left| J_0\left(\frac{r}{h} \lambda\right) \lambda d\lambda. \quad (3.8)$$

Здесь обозначено через

$$\tau_n(t, t) = e^{-\frac{\lambda^2 + n^2 z'^2}{h^2} ct} = \int_0^t Q(t-z) e^{-\frac{\lambda^2 + n^2 z'^2}{h^2} cz} dz, \quad (3.9)$$

а функция $A\left(\frac{a}{h} \lambda\right)$ задается соотношением (2.2). В важных частных случаях эта функция принимает значения

а) $A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) = q \frac{ah}{\lambda} J_1\left(\frac{a}{h} \lambda\right)$ при $q(r) = q = \text{const}$, (3.10а)

б) $A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) = \frac{P}{2\pi}$ в случае приложения сосредоточенной силы P , (3.10б)

в) $A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) = 2\lambda q \frac{h^2}{\lambda^2} J_2\left(\frac{a}{h} \lambda\right)$ при $q(r) = \lambda q \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$. (3.10в)

Можно показать (при условии $\int_0^h Q(z) dz < G$), что несобственный интеграл (3.8) сходится равномерно относительно своих параметров и является непрерывной функцией переменных z ($0 < z < h$) и t ($0 \leq t < \infty$).

Полученное выражение для порового давления (3.8) удовлетворяет граничным условиям. Проверим выполнение начального условия. Для этого в (3.8) положим $t = 0$

$$p(r, z, 0) = \frac{2\pi}{\beta_0 h^2} \int_0^h A\left(\frac{\alpha}{h} \lambda\right) \frac{\text{sh } \lambda (1 - \text{ch } \lambda)}{\lambda + \text{sh } \lambda \text{ ch } \lambda} \times \\ \times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n \sin \frac{n\pi}{h} z}{\lambda^2 + (n\pi)^2} \left| J_0\left(\frac{r}{h} \lambda\right) \right| d\lambda. \quad (3.8a)$$

Чтобы показать, что выражения (3.8a) и (3.4) совпадают, представим функцию $\text{ch}\left(\frac{z}{h} \lambda\right)$ в промежутке $(0, h)$ в виде ряда

$$\text{ch}\left(\frac{\lambda}{h} z\right) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{h} z \quad (3.11)$$

и

$$b_n = \frac{2}{h} \int_0^h \text{ch}\left(\frac{\lambda}{h} z\right) \sin \frac{n\pi}{h} z dz = 2\pi (1 + \text{ch } \lambda) \frac{n}{\lambda^2 + (n\pi)^2}. \quad (3.11a)$$

Учитывая (3.11) и (3.11a), нетрудно теперь выражение (3.8a) привести к виду (3.4).

Таким образом, найденное аналитическое выражение для порового давления в слое консолидируемого грунта при действии местной нагрузки отвечает всем поставленным граничным и начальному условиям.

В табл. 1 приведены значения функции $\bar{p}(t) = \frac{\beta_0}{q} p(t)$, определенные для глубины $z = h/2$ при $r = 0$ и действии равномерно-распределенной нагрузки $q = \text{const}$. При этом ядро ползучести принято в форме $Q(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Как видно из таблицы, поровое давление во времени сначала возрастает до некоторого значения, а затем падает до нуля. При этом время наступления максимума и его величина зависят как от фильтрационных свойств и свойств ползучести грунта, так и от размеров области приложения нагрузки и мощности слоя. В том случае, когда «скелет» грунта не обладает свойствами ползучести ($\lambda_1 \rightarrow \infty$), поровое давление сразу падает от начального значения до нуля.

Таблица значений $\bar{p}(t) = \frac{\bar{\sigma}_0}{q} p(t)$ при $\bar{\nu} = 1 \left| \frac{1}{T} \right|$

$\frac{h}{a}$	$\frac{c}{a^2}$	$\bar{\nu}_1$	$t [T]$					
			0	1	10	10 ²	10 ³	∞
0.5	0.1	∞	0.658	0.024	0	0	0	0
		0.1	0.658	0.162	0.062	0.19 · 10 ⁻⁴	0	0
		0.01	0.658	0.179	0.150	0.061	0.19 · 10 ⁻⁴	0
	0.01	∞	0.658	0.435	0.024	0	0	0
		0.1	0.658	1.055	0.909	0.25 · 10 ⁻³	0	0
		0.01	0.658	1.081	1.58	0.649	0.19 · 10 ⁻³	0
5	0.1	∞	0.684 · 10 ⁻¹	0.605 · 10 ⁻¹	0.432 · 10 ⁻¹	0.42 · 10 ⁻³	0	0
		0.1	0.684 · 10 ⁻¹	0.143	0.405	0.782 · 10 ⁻²	0	0
		0.01	0.684 · 10 ⁻¹	0.146	0.608	0.533	0.427 · 10 ⁻⁴	0
	0.01	∞	0.684 · 10 ⁻¹	0.606 · 10 ⁻¹	0.605 · 10 ⁻¹	0.432 · 10 ⁻¹	0.42 · 10 ⁻³	0
		0.1	0.684 · 10 ⁻¹	0.129	0.436	0.510	0.48 · 10 ⁻²	0
		0.01	0.684 · 10 ⁻¹	0.132	0.711	3.66	0.055	0

§ 4. Определение тензора напряжения $[\sigma_{ij}^{(t)}]$ и смещений $u_i^{(t)}$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(t)}$ будем искать в виде

$$\sigma_{zz}^{(t)} = \frac{2G_0 k}{\gamma_{10}} \int_0^t (P_{,zz} - P_{,kk}) d\tau + \frac{2G_0}{1-2\nu} (1 - \bar{K}) \times \\ \times \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \Delta^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi \right\}, \quad (4.1)$$

$$\sigma_{rz}^{(t)} = \frac{2G_0 k}{\gamma_{10}} \int_0^t P_{,rz} d\tau + \frac{2G_0}{1-2\nu} (1 - \bar{K}) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \Delta^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi \right\},$$

а смещения —

$$u_z^{(t)} = \frac{k}{\gamma_{10}} (1 + \bar{Q}) \left\{ \int_0^t P_{,z}(\tau) d\tau \right\} + \frac{1}{1-2\nu} \left[2(1 - \nu) \Delta^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi, \quad (4.2)$$

где $P(z)$ дается выражением (3.7), а φ — бигармоническая функция вида

$$\varphi = (1 + \bar{Q}) \left\{ \int_0^{\infty} \left[A_1(t) \operatorname{sh} iz + A_2(t) \operatorname{ch} iz + iz \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(A_3(t) \operatorname{sh} iz + A_4(t) \operatorname{ch} iz \right) \right] \left[\frac{J_0(ir)}{r^2} - d \right] \right\}. \quad (4.3)$$

Функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ и $A_4(t)$ определяются из следующих четырех условий:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sigma_{zz}^{(t)} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, & \quad 2. \quad u_z^{(t)} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\ 3. \quad \sigma_{rz}^{(t)} = 0 \quad \text{при} \quad z = h, & \quad 4. \quad u_z^{(t)} = 0 \quad \text{при} \quad z = h. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Указанные условия вытекают из граничных условий (1.3) и (1.4), а также ввиду того, что $\sigma_{ij}^{(t)}$ и $u_i^{(t)}$ тождественно удовлетворяют (1.3) и (1.4).

После ряда громоздких выкладок получим

$$\left. \begin{aligned} A_1(t) &= -\frac{(1-2\nu)^2}{(1-\nu)G_0} \frac{(1-2\nu)(1+\operatorname{ch}\lambda) - \operatorname{sh}\lambda(\operatorname{sh}\lambda - i)}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda} F(\lambda, ct), \\ A_2(t) &= \frac{(1-2\nu)^2}{(1-\nu)G_0} F(\lambda, ct), \quad A_3 = 0, \\ A_4(t) &= -\frac{(1-2\nu)^2}{(1-\nu)G_0} \frac{1 + \operatorname{ch}\lambda}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda} F(\lambda, ct), \end{aligned} \right\} (4.5)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} F(\lambda, ct) &= \frac{\operatorname{sh}\lambda(1 + \operatorname{ch}\lambda)\lambda}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda} A\left(\frac{a}{h}\lambda\right) \times \\ &\times \left[\sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2}{[\lambda^2 + (n\pi)^2]^2} (1 - e^{-\frac{\lambda^2 + n^2 \pi^2}{h^2} ct}) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Теперь нетрудно записать окончательные выражения для составляющих суммарного тензора напряжения $[z_{ij}(t)]$ и компонент смещения $u_i(t)$.

Для краткости выпишем лишь вертикальную составляющую смещения $u_z(t)$ при $z = h$. После ряда преобразований будем иметь следующее выражение для осадки слоя конечной мощности

$$\begin{aligned} s(r, t) &= u_z^{(t)}|_{z=h}; \\ s(r, t) &= \frac{1}{2G_0 h} \int_0^t A\left(\frac{a}{h}\lambda\right) \frac{\operatorname{sh}^2\lambda}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda} \left[\left| 1 + \int_0^t Q(\tau) d\tau \right| + \right. \\ &+ 4(1-2\nu) \frac{(1 - \operatorname{ch}\lambda)^2 \lambda}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda} \left. \int_0^t \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{[\lambda^2 + (n\pi)^2]^2} \times \right. \\ &\times \left. \left(1 + \int_0^t Q(\tau) d\tau - \varphi_n(\lambda, t) \right) \right] J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь функция $\varphi_n(\lambda, t)$ определяется по-прежнему в форме (3.9). Найдем значения осадки основания в „стабилизированном“ состоянии. Для этого в формуле (4.7) устремим $t \rightarrow \infty$. В результате будем иметь

$$S(r, \infty) = \frac{1 + \int_0^{\infty} Q(\tau) d\tau}{2G_0 h} - \int_0^{\infty} A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) \frac{\text{sh}^2 \lambda}{\lambda + \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda} \times \\ \times \left[1 + 4(1 - 2\nu) \frac{(1 + \text{ch} \lambda)^2 \lambda}{\lambda + \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda} \left| \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{[\lambda^2 + (n\pi)^2]^2} \right| \right] J_0\left(\frac{r}{h} \lambda\right) d\lambda. \quad (4.7a)$$

Теперь покажем, что существует следующее равенство:

$$\sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{[\lambda^2 + (n\pi)^2]^2} = \frac{1}{4\lambda} \frac{\lambda + \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda}{(1 + \text{ch} \lambda)^2}. \quad (4.8)$$

Действительно, воспользовавшись известным равенством Парсеваля применительно к ряду (3.11)

$$\frac{2}{h} \int_0^h \text{ch}^2\left(\frac{\lambda}{h} z\right) dz = \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} b_n^2,$$

будем иметь

$$\frac{1}{\lambda} (\lambda + \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda) = 4(1 + \text{ch} \lambda)^2 \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2}{[\lambda^2 + (\pi n)^2]^2},$$

откуда непосредственно следует (4.8).

Преобразуя затем (4.7a) с помощью соотношения (4.8), получим

$$s(r, \infty) = \frac{(1 - \nu) \left(1 + \int_0^{\infty} Q(\tau) d\tau \right)}{G_0 h} \times \\ \times \left[\int_0^{\infty} A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) \frac{\text{sh}^2 \lambda}{\lambda + \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda} J_0\left(\frac{r}{h} \lambda\right) d\lambda \right]. \quad (4.7б)$$

В случае, когда свойства ползуности у „скелета“ грунта отсутствуют ($Q(t) \equiv 0$), „стабилизовавшееся“ значение осадки совпадает с упругим решением. Так, например, при действии равномерно-распределенной нагрузки по площади круга $r = a$ $\left(A\left(\frac{a}{h} \lambda\right) = q \frac{ah}{\lambda} J_1\left(\frac{a}{h} \lambda\right) \right)$

будем иметь

$$s(r, \infty) = \frac{1 - \nu}{2G_0} qa \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}^2 \lambda}{\lambda + \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda} J_1\left(\frac{a}{h} \lambda\right) J_0\left(\frac{r}{h} \lambda\right) \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (4.9)$$

что совпадает с решением, полученным в работе [4].

Рассмотрим некоторые численные подсчеты, проведенные по полученным выше формулам, принимая $q(r) = q = \text{const}$ и $Q(t) = \delta e^{-\delta t}$.

Для этого случая формулу для осадки запишем в форме

$$s(r, t) = \frac{qa}{2G_0} \left\{ 2(1-\nu) \left[1 + \frac{\delta}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}) \right] \omega(r) - (1-2\nu) \omega(r, t) \right\}. \quad (4.10)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \omega(r) &= \int_0^\lambda \frac{\text{sh}^2 \lambda}{\lambda + \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda} J_1\left(\frac{a}{h} \lambda\right) J_0\left(\frac{r}{h} \lambda\right) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \omega(r, t) &= 4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \lambda (1 + \text{ch} \lambda)^2 \lambda}{(\lambda + \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda)^2} \left[\sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{[i^2 + (n\pi)^2]^2} \bar{\gamma}_n(i, t) \right] \times \\ &\quad \times J_1\left(\frac{a}{h} \lambda\right) J_0\left(\frac{r}{h} \lambda\right) \frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Результаты численных подсчетов показывают, что перекоп штампа во времени возрастает, достигая некоторого максимума, а затем падает до первоначального значения. Последнее легко объясняется, исходя из того, что скорость осадки под центром гибкого штампа больше, чем под его краем.

Очень важно также знать среднюю интегральную величину осадки, которую можно определить, исходя из соотношения

$$s_{\text{ср}} = \frac{2\pi \int_0^a s(r, t) r dr}{\pi a^2}. \quad (4.12)$$

В соответствии с этим средняя осадка подсчитывается также по формуле (4.10), но функции ω и $\omega(t)$ принимают значения

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ср}} &= \frac{2h}{a} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \lambda}{\lambda + \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda} J_1^2\left(\frac{a}{h} \lambda\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2}, \\ \omega_{\text{ср}}(t) &= \frac{8h}{a} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \lambda (1 + \text{ch} \lambda)^2 \lambda}{(\lambda + \text{sh} \lambda \text{ch} \lambda)^2} \left[\sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(i^2 + n^2 \pi^2)^2} \bar{\gamma}_n(i, t) \right] \times \\ &\quad \times J_1^2\left(\frac{a}{h} \lambda\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2}. \end{aligned} \quad (4.11a)$$

В табл. 2 приведены значения степени консолидации $U = \frac{s_{\text{ср}}(t)}{s_{\text{ср}}(\infty)}$ слоя конечной мощности при действии на его границе равномерно-распределенной по площади круга $r = a$ нагрузки q в случае, когда грунт не обладает свойствами ползучести ($Q(t) = 0$).

В табл. 3 приведены результаты некоторых расчетов степени консолидации грунта, „скелет“ которого подчиняется закономерностям наследственной теории ползучести с ядром $Q(t) = \delta e^{-\delta t}$.

Таблица 2

Таблица значений степени консолидации слоя $U = \frac{s_{cp}(t)}{s_{cp}(\infty)}$ при $\delta_1 = \infty$

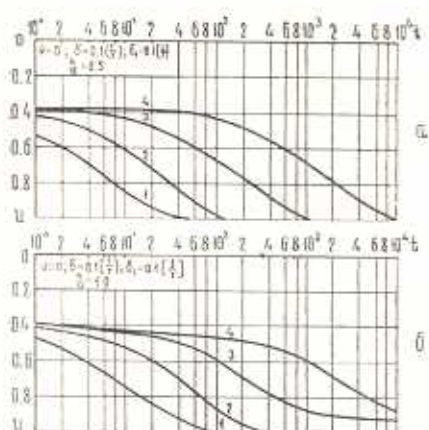
γ	$\frac{h}{a}$	$et a^2$									
		0	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	∞
0	0.5	0.5	0.572	0.573	0.581	0.628	0.773	0.995	1.00	1.00	1.00
	1.0	0.5	0.574	0.574	0.577	0.690	0.689	0.901	1.00	1.00	1.00
	5.0	0.5	0.745	0.745	0.745	0.747	0.765	0.827	0.946	0.999	1.00
	10.0	0.5	0.814	0.814	0.814	0.815	0.821	0.863	0.937	0.987	1.00
1.3	0.5	0.75	0.785	0.787	0.791	0.814	0.856	0.973	1.00	1.00	1.00
	1.0	0.75	0.733	0.783	0.789	0.800	0.833	0.951	1.00	1.00	1.00
	5.0	0.75	0.873	0.873	0.873	0.874	0.883	0.914	0.972	0.999	1.00
	10.0	0.75	0.907	0.907	0.907	0.908	0.910	0.925	0.970	0.994	1.00

Таблица 3

Таблица значений степени консолидации $U = \frac{s_{cp}(t)}{s_{cp}(\infty)}$

γ	$\frac{h}{a}$	$\frac{e}{a^2} \left[\frac{1}{T} \right]$	$\delta_1 = 1 \left[\frac{1}{T} \right]; \delta_1 = 0,1 \left[\frac{1}{T} \right]$						
			$t [T]$						
			0	1	10	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	∞
0	0.5	10^{-2}	0.0454	0.131	0.630	0.999	1	1	1
		10^{-3}	0.0454	0.110	0.469	0.991	1	1	1
		10^{-4}	0.0454	0.096	0.388	0.745	0.995	1	1
		10^{-5}	0.0454	0.095	0.354	0.596	0.755	0.995	1
0	5.0	10^{-2}	0.0454	0.135	0.545	0.938	0.999	1	1
		10^{-3}	0.0454	0.134	0.503	0.821	0.943	0.999	1
		10^{-4}	0.0454	0.133	0.499	0.765	0.842	0.943	1
		10^{-5}	0.0454	0.133	0.498	0.749	0.767	0.842	1
1.3	0.5	10^{-2}	0.0382	0.154	0.648	0.999	1	1	1
		10^{-3}	0.0382	0.144	0.567	0.995	1	1	1
		10^{-4}	0.0382	0.137	0.526	0.873	0.997	1	1
		10^{-5}	0.0382	0.135	0.514	0.798	0.888	0.997	1
1.3	5.0	10^{-2}	0.0682	0.157	0.605	0.969	0.999	1	1
		10^{-3}	0.0682	0.155	0.585	0.910	0.971	0.999	1
		10^{-4}	0.0682	0.155	0.582	0.882	0.921	0.972	1
		10^{-5}	0.0682	0.155	0.582	0.875	0.884	0.921	1

Наконец, на фиг. 2 приведены некоторые сравнительные графики консолидации слоя конечной мощности, учитывающие ползучесть „скелета“ грунта.



Фиг. 2. Зависимость степени консолидации слоя U от времени

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{c}{a^2} &= 10^{-2} \left[\frac{1}{T} \right], & 2. \quad \frac{c}{a^2} &= 10^{-3} \left[\frac{1}{T} \right], \\
 3. \quad \frac{c}{a^2} &= 10^{-4} \left[\frac{1}{T} \right], & 4. \quad \frac{c}{a^2} &= 10^{-5} \left[\frac{1}{T} \right].
 \end{aligned}$$

§ 5. Принцип Н. Х. Арутюняна для двухфазной среды

В тех случаях, когда свойства грунта таковы, что можно принять $\gamma = \text{const}$ (или что то же при $K_D(t) = K_0(t) = K(t)$) и сжимаемостью воды пренебречь $\lambda_w \rightarrow \infty$, решение задачи ползучести двухфазных грунтов может быть легко получено из решения соответствующей задачи при $K(t) = 0$.

В этом случае, как нетрудно убедиться, уравнения (1.1) будут удовлетворены, если принять

$$u_i(t) = u_i(t)/_{K(t)=0} + \int_0^t Q(t-\tau) u_i(\tau)/_{K(t)=0} d\tau, \quad (5.1)$$

где $u_i(t)/_{K(t)=0}$ — смещения в аналогичной задаче, но не учитывающей ползучесть «скелета грунта» ($K(t) = 0$); $Q(t)$ — резольвента ядра $K(t)$ интегрального уравнения состояния.

Действительно, подставляя (5.1) в верхнюю строку (1.1), будем иметь

$$\gamma_0 \Delta^2 u_i /_{K(t)=0} + (\gamma_0 + \gamma_0) u_{i,tt} /_{K(t)=0} = \gamma_0 P_{i,t}. \quad (5.2)$$

Левая часть написанного соотношения равна по предположению $\gamma_0 P_{i,t} /_{K(t)=0}$.

При этом функция $p(t)_{K(t)=0}$ определяется из решения уравнения

$$c\Delta^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (5.3)$$

Функция же $P(t)$ при $\nu = \text{const}$ и $\alpha_w \rightarrow \infty$ является решением уравнения того же типа, что и уравнение (5.3)

$$c\Delta^2 P = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (5.4)$$

Поэтому, если граничные условия для порового давления поставлены вида $\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_z = 0$ и $p \Big|_z = 0$, то решения уравнений (5.3) и (5.4) тождественно совпадают, а соотношение (5.2) превращается в тождество.

Таким образом, можно сформулировать обобщенную теорему Н. Х. Арутюняна [2] для *двухфазной среды*. В случае, когда коэффициент Пуассона „скелета грунта“ не меняется во времени ($\nu = \text{const}$), а поровая жидкость несжимаема ($\alpha_w \rightarrow \infty$), смещения находятся по формулам (5.1), напряженное же состояние с учетом ползучести „скелета“ будет тождественно совпадать с напряженным состоянием, найденным в предположении, что $K(t) = 0$

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij|K(t)=0}. \quad (5.5)$$

Последнее справедливо, если граничные условия поставлены в напряжениях, а граничные напоры заданы вида: либо $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, либо $p = 0$.

ՅԱՆ. Կ. ՉԱՐԵՔԻԻ

ԵՐԿՖԱԶ ԲՆԱՀՈՂԻ ՇԵՐՏԻ ՍՈՂՔԸ ՏԵՂԱԿԱՆ ԲԵՌԻ ԱԶԳԵՅՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ա Վ Փ Ն Փ Ն Ն Վ

Հոդվածում դիտված է երկֆազ բնահողի և հզորութիւն շերտի լարվածագեֆորմացիոն վիճակը: Այդ շերտի մակերևութին կիրառված է $r = \alpha$ շտապիդ ունեցող շրջանի մակերեսով բաշխված $q(r)$ բնուր: Տրված է շերտում ծակոտկենային ննշման մանրամասն վերլուծութիւնը և որոշված շերտի նստվածքը: Յուցադրման համար բերված են մի քանի թվային լուծումներ:

Y. K. ZARETSKY

THE CREEP OF A LAYER OF TWO-PHASE SOIL UNDER THE ACTION OF A LOCAL LOAD

S u m m a r y

This paper considers the stress-strain state of a layer of a two-phase soil of „h“ thickness.

On the surface of this layer the load $q(r)$ distributed on the area of a circle with a radius $r = a$ has been applied.

Detail analysis of porous-pressure in the layer has been made and the settlement of the layer determined. For the illustration of the theoretical solution some examples have been computed.

Л И Т Е Р А Т У Р А.

1. Зарецкий Ю. К. Ползучесть полупространства из двухфазного грунта под действием сил, приложенных нормально к границе. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 19, № 2, 1966.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1952.
3. Горбунов-Посадов М. И. Осадки фундаментов на слое грунта, подстилаемом скальным основанием. Стройиздат, 1946.
4. Егоров К. Е. К вопросу деформации оснований конечной толщины. Сб. трудов НИИ оснований, № 34, 1958.
5. Шехтер Ю. Я. Об определении осадок в грунтах с подстилающим слоем под фундаментом. Гидротехническое строительство, № 10, 1937.
6. Burmister D. M. Stress and Displacement Characteristics of a Two-Layer Rigid Base Soil System: Influence Diagrams and Practical Applications, Proc. 35 th. Annual Meeting, p. 773, 1955.