

А. М. СИМОНЯН

О ПЛОСКОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАДАЧЕ КОНТАКТА ОРТОТРОПНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

В настоящей работе исследуется контактная температурная задача однородных ортотропных тел, обладающих свойством линейно-наследственной ползучести [1], при плоской деформации.

При отсутствии теплового потока для случая одной области контакта задача эта была решена в работе [2].

Решение плоской контактной задачи изотропных материалов в условиях пластичности со степенным упрочнением дано в работе [3], в условиях линейной наследственности — в работе [4], а при пластической наследственности — в работе [5].

§ 1. Основные предпосылки

Соотношения между деформациями и напряжениями запишем в виде [2]:

$$\varepsilon_i(t) = (1 - K^*) \left[\frac{\sigma_i(t)}{E_i} - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_y(t) - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \sigma_z(t) \right] + \varepsilon_i^c(t) \quad (x, y, z), \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{xy}(t) = (1 - K^*) \frac{\tau_{xy}(t)}{G_{xy}}, \quad (x, y, z), \quad (1.2)$$

где

$$K^* \varepsilon_i(t) = \int_0^t \varepsilon_i(\tau) \frac{\partial \tau_i(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.3)$$

а ε_i^c — вынужденные деформации.

Докажем следующее утверждение: «При плоском деформационном состоянии, в случае однородных краевых условий и напряжениях и отсутствия объемных сил, перемещения точек ортотропного тела не зависят от факта ползучести».

Разрешая системы (1.1) и (1.2) относительно напряжений, получим

$$\sigma_x(t) = \frac{E_x}{1 - \nu_{yz}\nu_{yz} - \nu_{zx}\nu_{xz} - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{yz}\nu_{zx} - \nu_{yz}\nu_{zy}\nu_{xz}} \times \\
 \times (1 + H^*) \{ (1 - \nu_{yz}\nu_{yz}) [\varepsilon_x(t) - \varepsilon_x^c(t)] - (\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zx}) [\varepsilon_y(t) - \varepsilon_y^c(t)] + \\
 + (\nu_{zx} + \nu_{zy}\nu_{yx}) [\varepsilon_z(t) - \varepsilon_z^c(t)] \} \quad (x, y, z), \quad (1.4)$$

$$\tau_{xy}(t) = G_{xy}(1 + H^*) \gamma_{xy}(t) \quad (x, y, z), \quad (1.5)$$

где $H(t, \tau)$ — резольвента ядра $\frac{\partial \gamma_i(t, \tau)}{\partial \tau}$.

Подставляя (1.4) и (1.5) в уравнения равновесия и учитывая отсутствие объемных сил, получим

$$(1 + H^*) L(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0, \varepsilon_y - \varepsilon_y^0, \varepsilon_z - \varepsilon_z^0, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}) = 0 \quad (x, y, z), \quad (1.6)$$

где L — некоторая линейная комбинация первых производных указанных в скобках функций по координатам.

Поскольку однородное уравнение Вольтерра (1.6) не имеет нетривиальных решений, получим

$$L(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0, \varepsilon_y - \varepsilon_y^0, \varepsilon_z - \varepsilon_z^0, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}) = 0 \quad (x, y, z). \quad (1.7)$$

Если функции перемещений, являющиеся решением этой задачи в предположении упругой работы материала, подставить в уравнения (1.6), то последние будут тождественно удовлетворяться. Точно так же будут совпадать краевые условия в напряжениях на свободных поверхностях, в чем можно убедиться из уравнений (1.4) и (1.5).

Таким образом, при решении задачи о ползучести тела при плоском деформированном состоянии, когда краевые условия в напряжениях однородны и объемные силы отсутствуют, перемещения можно взять равными решениям упругой задачи.

Плоская температурная контактная задача в силу справедливости принципа наложения [1] будет сведена к решению температурной задачи ползучести для ортотропной полуплоскости, а затем к отдельному решению контактной задачи с учетом перемещений, имеющих место от температуры.

Функции перемещений в температурной задаче ползучести для ортотропного полупространства при плоском деформационном состоянии на основании вышесказанного будут совпадать с решением аналогичной упругой задачи.

§ 2. О температурной задаче для упругой ортотропной полуплоскости

Как известно [6, 7], температурные задачи изотропной среды в большинстве случаев сводятся к уравнению Пуассона для термоупругого потенциала перемещений. Существование же термоупругого потенциала перемещений у ортотропной среды, по-видимому, даже при изменении масштабов координат не всегда возможно.

При плоской деформации уравнения равновесия в перемещениях запишутся

$$\begin{aligned} (1 - \nu_{yz}\nu_{zy}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{G_{xy}}{E_x} z \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\nu_{yx} + \nu_{xz}\nu_{zx} + \frac{G_{xy}}{E_x} z \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \\ = [(1 - \nu_{yz}\nu_{zy}) z_x + (\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zx}) z_y] \frac{\partial T}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$(1 - \nu_{zx}\nu_{xz}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{G_{xy}}{E_y} z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy} + \frac{G_{xy}}{E_y} z \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \\ = [(1 - \nu_{zx}\nu_{xz}) z_y + (\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}) z_x] \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (2.2)$$

где

$$z = 1 - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{xz}\nu_{zx} - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx} - \nu_{yz}\nu_{zy}\nu_{xz}.$$

Здесь, не ограничивая общности, мы полагаем, что фиксирование состояния плоской деформации осуществлено без нагружения при $T=0$.

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (2.1) и (2.2) и удовлетворению заданным краевым условиям. Случай полуплоскости, однако, замечателен тем, что можно искать лишь частные решения (2.1) и (2.2), так как краевая задача полуплоскости при отсутствии вынужденных деформаций решена, а, кроме того, для линейной полужесткости справедлив закон наложения.

Уравнения (2.1) и (2.2) можно записать в виде

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = a_4 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.3)$$

$$b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = b_4 \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2.4)$$

Если T является функцией лишь одной координаты, то частные решения (2.3) и (2.4) найти очень легко. Пусть, например, $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$.

Тогда можно принять

$$v \equiv 0 \quad \text{и} \quad u = \frac{a_1}{a_1} \int T dx.$$

Осуществим для функции $T(x, y)$ преобразование Фурье

$$T(x, y) = \int_0^{\infty} f(x, s) \cos sy ds, \quad (2.5)$$

где

$$f(x, s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T(x, y) \cos sy dy. \quad (2.6)$$

Функции перемещений будем искать в виде

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} \varphi(x, s) \cos sy ds, \quad v(x, y) = \int_0^{\infty} \psi(x, s) \sin sy ds. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.6) и (2.7) в (2.3) и (2.4), получим

$$a_1 \varphi'' - a_2 s^2 \varphi - a_3 s \psi' = a_4 f', \quad (2.8)$$

$$b_2 \psi'' - b_1 s^2 \psi - b_3 s \psi' = b_4 s f, \quad (2.9)$$

где все производные функций взяты по координате x .

Решая совместно (2.8) и (2.9), приходим к уравнению

$$\frac{1}{\sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^{n_l} \frac{A_l^{(q)}}{(D-r_l)^q}} \varphi = \frac{a_1 b_2}{s a_3} \varphi^{IV} - \left(\frac{a_2 b_2}{a_3} s + \frac{a_1 b_1}{a_4} s + b_3 s \right) \varphi'' +$$

$$+ \frac{a_2 b_1 s^3}{a_3} \varphi = \frac{a_4 b_2}{a_3 s} f' - \frac{a_1 b_1 s}{a_3} f' + b_4 s f, \quad (2.10)$$

Частным решением (2.10), согласно символическому методу, будет

$$\varphi(x, s) = \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^{n_l} A_l^{(q)} e^{r_l x} \int_{x_0}^x (x-\xi)^{q-1} e^{-r_l \xi} \left[\frac{a_4 b_2}{a_3 s} f_{\xi}'''(\xi, s) - \right.$$

$$\left. - \frac{a_4 b_1 s}{a_3} f_{\xi}'(\xi, s) + b_4 s f(\xi, s) \right] d\xi, \quad (2.11)$$

где

$$r_l = \pm \sqrt{\frac{a_2 b_2 + s^2 (a_1 b_1 + a_3 b_3)}{2 a_1 b_2}} \pm \sqrt{\left| \frac{a_2 b_2 + s^2 (a_1 b_1 + a_3 b_3)}{2 a_1 b_2} \right|^2 - \frac{a_2 b_1 s^4}{a_1 b_2}}$$

m — число различных r_l ,

n_l — кратность решения r_l , x_0 произвольна, так что интеграл в (2.11) можно заменить неопределенным. В (2.11) учтено, что кратность r_l не может быть больше двух. Функция $\psi(x)$ с точностью до постоянной определяется из (2.8), а произвол постоянной устранится в (2.9). Вслед за этим определяются напряжения на границе полуплоскости, соответствующие (2.7), и решается задача при отсутствии температуры от действия нагрузок на границе полуплоскости [8, стр. 76], равных и противоположно направленных найденным напряжениям. Наложение этих двух решений даст искомое решение задачи.

Теперь укажем частный случай ортотропии, когда термоупругий потенциал перемещений при плоском деформационном состоянии существует. Пусть имеют место соотношения

$$E_x = \frac{\nu_{zy} - \nu_{zx}}{E_x - E_y} E_x E_y \quad \text{или, что то же,}$$

$$E_x (1 - \nu_{zy} \nu_{yz}) = E_y (1 - \nu_{zx} \nu_{xz}), \quad (2.12)$$

$$G_{xy} = \frac{E_x}{2} \frac{1 - \nu_{yx} - \nu_{yz} \nu_{zy} - \nu_{zx} \nu_{xz}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx} - \nu_{yz} \nu_{zy} - \nu_{xz} \nu_{zx} - \nu_{xy} \nu_{yz} \nu_{zx} - \nu_{yx} \nu_{zy} \nu_{xz}}, \quad (2.13)$$

$$\nu_x = \nu_y. \quad (2.14)$$

Нетрудно видеть, что последними тремя уравнениями охватывается случай изотропии.

Подставляя (2.12) – (2.14) в (2.1) и (2.2), а также используя соотношения

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (2.15)$$

получим уравнение Пуассона для термоупругого потенциала перемещений

$$\Delta F = \alpha h T, \quad (2.16)$$

где

$$h = \frac{1 - \nu_{xy} - \nu_{yz}\nu_{zy} + \nu_{zx}\nu_{xz}}{1 - \nu_{yz}\nu_{zy}}, \quad (2.17)$$

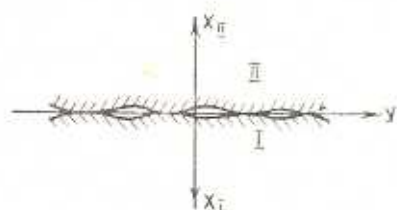
§ 3. Плоская температурная контактная задача

Как известно, в области контакта имеет место соотношение

$$u_1(t) + u_2(t) = i(t) + \alpha_0(t)y - f_1(y) - f_2(y), \quad (3.1)$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — перемещения соответственно двух тел, а $f_1(y)$ и $f_2(y)$ — их уравнения поверхностей до деформирования (за положительное направление x для каждого из сжимающихся тел принимается направление внутрь его).

Положим для общности, что сжимающиеся тела с гладкими поверхностями имеют n областей контакта (фиг. 1).



Фиг. 1.

Обозначим решения температурной задачи для ортотропной полуплоскости через u_{1T} и u_{2T} , а перемещения, вызванные сжатием, — через u_{1p} и u_{2p} .

Используя результаты [2], будем иметь

$$u_{ip}(t) = i_i \sum_{j=1}^n (1 - K^*) \int_{a_j(t)}^{b_j(t)} p(s, t) \ln \frac{1}{|y - s|} ds + C(t), \quad i = 1, 2, \quad (3.2)$$

где

$$i = \frac{(1 - \nu_{zx}\nu_{xz})(\xi_1 + \xi_2)}{\pi k E_i \xi_1^2 \xi_2^2}, \quad (3.3)$$

$$k = \sqrt{\frac{E_z - E_x \nu_{zy}^2}{E_z - E_x \nu_{zx}^2} \frac{E_1}{E_2}}, \quad (3.4)$$

а ξ_1 и ξ_2 — корни с положительной вещественной частью биквадратного уравнения

$$\left(\frac{1}{E_y} - \frac{\nu_{zy}^2}{E_z} \right) \xi^4 - \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} - \frac{\nu_{zx}\nu_{zy}}{E_z} \right) \xi^2 + \frac{1}{E_x} - \frac{\nu_{zx}^2}{E_z} = 0. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим

$$\sum_{j=1}^n \int_{a_j(t)}^{b_j(t)} p(s, t) \ln \frac{1}{|y-s|} ds = \omega(y, t), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \omega(y, t) &= \int_{\tau_0}^t \omega(y, \tau) \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\partial \gamma_1(t, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\partial \gamma_2(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau = \\ &= \frac{\gamma_0(t) + x^*(t)y - f_1(y) - f_2(y) - u_{1\tau}(y, t) - u_{2\tau}(y, t)}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (3.7) \\ & \quad a_j(t) \leq y \leq b_j(t), \end{aligned}$$

где $\gamma_0(t)$ и $x^*(t)$ — произвольные функции.

Уравнение (3.7) может быть решено методом итерированных ядер. В некоторых случаях, однако, удается получить решение его в конечном виде. Таковы, например, случаи представления ядер ползучести

$$\frac{\partial \gamma_1(t, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \gamma_2(t, \tau)}{\partial \tau}$$

в виде экспоненциальных функций одного и того же дробного порядка [9] с равными показателями и при отсутствии старения, случаи представления их в виде экспоненциальных функций нулевого порядка с одинаковыми показателями с учетом старения [4] и с различными показателями ползучести без учета старения [2].

Решение (3.7) можно представить в виде

$$\omega(y, t) = v_1(t) + y v_2(t) + f(y, t), \quad a_j(t) \leq y \leq b_j(t), \quad (3.8)$$

где

$$f(y, t) = -(1 + A^*) \frac{f_1(y) + f_2(y) + u_{1\tau}(y, t) + u_{2\tau}(y, t)}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (3.9)$$

а $A(t, \tau)$ — резольвента выражения в квадратных скобках (3.7).

Следуя [10], решение уравнения (3.6) будем искать в виде

$$p(y, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \Phi(z, t) \quad \text{при} \quad x = +0, \quad a_j \leq y \leq b_j, \quad (3.10)$$

где

$$z = y + ix, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

При этом к функции $\Phi(z)$ предъявляются нижеследующие три требования:

$$\operatorname{Re} \Phi(z, t) = f_j(y, t) + v_2(t) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad a_j \leq y \leq b_j, \quad (3.11)$$

$$\operatorname{Im} \Phi(z, t) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad y \text{ вне } (a_j, b_j). \quad (3.12)$$

Функция $\Phi(z, t)$ должна допускать разложение

$$\Phi(z, t) = - \sum_{j=1}^n \int_{a_j(t)}^{b_j(t)} p(\zeta, t) \left(\frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \frac{\zeta^2}{z^3} + \dots \right) d\zeta. \quad (3.13)$$

Используя здесь интегральные уравнения равновесия

$$P(t) = \sum_{j=1}^n \int_{a_j(t)}^{b_j(t)} p(\zeta, t) d\zeta, \quad (3.14)$$

$$e(t)P(t) = \sum_{j=1}^n \int_{a_j(t)}^{b_j(t)} p(\zeta, t) \zeta d\zeta, \quad (3.15)$$

где $P(t)$ — сжимающая сила, а $e(t)$ — ее эксцентриситет, формулу (3.13) можно записать в виде

$$\Phi(z, t) = - \frac{P(t)}{z} - \frac{e(t)P(t)}{z^2} + \frac{\theta_1(t)}{z^3} + \frac{\theta_2(t)}{z^4} + \dots \quad (3.16)$$

Функцию $\Phi(z, t)$, аналогично [10], будем искать в виде

$$\Phi(z, t) = \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \int_{a_j}^{b_j} \sqrt{\prod_{j=1}^n (\zeta - a_j)(\zeta - b_j)} \left[\frac{f_1(\zeta, t) + g_2(t)}{\zeta - z} d\zeta + P_{n-1}(z, t) \right]}{\pi \sqrt{\prod_{j=1}^n (z - a_j)(z - b_j)}}, \quad (3.17)$$

где

$$P_{n-1}(z, t) = C_0(t) + C_1(t)z + C_2(t)z^2 + \dots + C_{n-1}(t)z^{n-1}. \quad (3.18)$$

Можно показать, что (3.17) удовлетворяет (3.11) и (3.12).

Осуществляя разложение (3.17) по степеням z , получим

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) = & \frac{1}{z^n} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{a_j(t)}{2z} + \frac{3a_j^2(t)}{8z^2} + \dots \right) \times \\ & \times \left(1 + \frac{b_j(t)}{2z} + \frac{3b_j^2(t)}{8z^2} + \dots \right) \left(\frac{p_0(t)}{z} + \frac{p_1(t)}{z^2} + \dots + C_0(t) + \right. \\ & \left. + C_1(t)z + \dots + C_{n-1}(t)z^{n-1} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отсюда можно усмотреть, что $\Phi(z, t)$ из (3.17) допускает разложение (3.16). Попутно получим два равенства:

$$C_{n-1}(t) = -P(t), \quad (3.20)$$

$$C_{n-2}(t) = -P(t) \left[\gamma(t) - \frac{\sum_1^n a_j + b_j}{2} \right]. \quad (3.21)$$

Из (3.10) и (3.17) определим

$$\begin{aligned} p(y, t) = & \frac{(-1)^{n-t-1}}{\pi \sqrt{\prod_{m=1}^n [y - a_m(t)][y - b_m(t)]}} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m(t)}^{b_m(t)} \sqrt{\prod_{m=1}^n [s - a_m(t)][s - b_m(t)]} \times \right. \\ & \left. \times \frac{f_1(s, t) + v_2(t)}{s - y} ds + P_{n-1}(y, t) \right\} \quad a_i < y < b_i. \quad (3.22) \end{aligned}$$

В случае, когда границы контактов не заданы, в формуле (3.22) будет $3n - 1$ неизвестных функций от t ($2n$ функций $a_i(t)$ и $b_i(t)$, $n - 2$ функции $C_i(t)$ и $v_2(t)$). Для их определения воспользуемся условиями ограниченности давления в граничных точках контакта, которые дадут $2n$ уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m(t)}^{b_m(t)} \sqrt{\prod_{m=1}^n [s - a_m(t)][s - b_m(t)]} \times \\ & \times \frac{f_1(s, t) + v_2(t)}{s - \xi} ds + P_{n-1}(\xi, t) = 0 \quad \xi = a_k, b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Пользуясь (3.6) и (3.8), запишем недостающие $n - 1$ уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^n \int_{a_m(t)}^{b_m(t)} p(s, t) \ln \left| \frac{s - b_k(t)}{s - a_{k-1}(t)} \right| ds = f_1(a_{k-1}(t), t) - f_1(b_k(t), t) + \\ & - [a_{k-1}(t) - b_k(t)] v_2(t) \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.24) \end{aligned}$$

В случае заданных границ контакта отпадают уравнения (3.23).

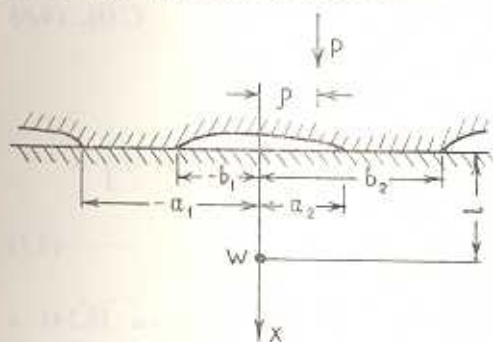
В качестве приложения рассмотрим нижеследующий пример.

§ 4. Действие двух жестких связанных плоских штампов на полуплоскость с точечным источником тепла

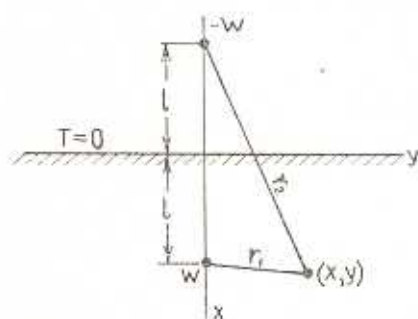
Пусть на расстоянии l от границы полуплоскости действует точечный источник тепла с производительностью W , причем граница полуплоскости имеет постоянную температуру, которую и примем за начало отсчета температуры.

Положим, что симметрично расположенные относительно источника два плоских штампа (фиг. 2) связаны, то есть не могут перемещаться друг относительно друга. Зададимся целью определить давление под штампами.

Как было указано в § 1, сначала следует решить температурную задачу для упругой ортотропной ненагруженной полуплоскости.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Дополним полуплоскость до полной плоскости и в точке $(-l, 0)$ поместим сток тепла с интенсивностью W . В таком случае температура в точках $x = 0$, как и требуется, будет равна нулю. При условии (2.14) температурным полем будет (фиг. 3)

$$T = \frac{W(t)}{2\pi g} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (4.1)$$

где g — коэффициент теплопроводности.

Будем полагать, что упругие постоянные материала удовлетворяют уравнениям (2.12) и (2.13). Тогда можно воспользоваться уравнением (2.16)

$$\Delta F = \alpha h \frac{W(t)}{2\pi g} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (4.2)$$

Частным решением (4.2) будет

$$F = \alpha h \frac{W(t)}{8\pi g} [r_2^2 (\ln r_2 - 1) - r_1^2 (\ln r_1 - 1)]. \quad (4.3)$$

Используя (2.15), найдем перемещения, соответствующие (4.3), которые на границе полуплоскости определяются выражениями

$$u(0, y) = \frac{\alpha l h W(t)}{2 \pi g} \left(\ln \sqrt{l^2 + y^2} - \frac{1}{2} \right) + C(t), \quad v(0, y) = 0. \quad (4.4)$$

Теперь определим напряжения на границе полуплоскости, соответствующие (4.3):

$$\sigma_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = \frac{\alpha l h G_{xy} W(t)}{\pi g} \frac{y}{l^2 + y^2}. \quad (4.5)$$

Таким образом, на полученное решение (4.4) следует наложить перемещения, вызванные распределенной нагрузкой на границе полуплоскости $-\tau_{xy}(0, y)$ при отсутствии воздействия температуры, в предположении упругой работы материала.

Для этих перемещений получим формулу

$$u(0, y) = \frac{\alpha l h G_{xy} W(t)}{\pi g \xi_1 \xi_2} \frac{1 - \nu_{xy} - \nu_{xz}(\nu_{zx} + \nu_{zy})}{E_x} \ln \sqrt{l^2 + y^2} + C(t). \quad (4.6)$$

Из (3.9), (4.6) и (4.4) имеем

$$f(y, t) = -\frac{h \alpha l}{2 g \pi \lambda} \left\{ \left[1 - \frac{2 G_{xy}}{\xi_1 \xi_2 E_x} (1 - \nu_{xy} - \nu_{xz} \nu_{zx} - \nu_{xz} \nu_{zy}) \right] \times \right. \\ \left. \times \ln \sqrt{l^2 + y^2} - \frac{1}{2} \right\} (1 + A^*) W(t). \quad (4.7)$$

Обе функции $C_i(t)$ здесь определяются по формулам (3.14) и (3.15). Для определения $\nu_2(t)$ используем (3.24), откуда с учетом геометрической симметрии будем иметь

$$\nu_2(t) = \frac{P(t) \gamma(t)}{\pi (a_2 - b_1)} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\ln \left| \frac{s - b_1}{s - a_2} \right|}{\sqrt{|(s^2 - a_2^2)(s^2 - b_2^2)|}} ds. \quad (4.8)$$

Вслед за этим определяется давление под штампами по формуле (3.22).

Проиллюстрируем это на численном примере.

Пусть имеем $P(t) = 1000$ кт, $\gamma(t) = 0$, $W(t) = 8,3 \frac{\text{ккал}}{\text{час. см.}}$, $l = 10$ см, $a_1 = -15$ см, $b_1 = -5$ см, $a_2 = 5$ см, $b_2 = 15$ см. Приняты следующие механические характеристики бетонной сжимаемой среды:

$$g = 0,008 \frac{\text{ккал.}}{\text{час. см. град.}}, \quad \alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град.}}$$

$$E_x = 180\,000 \text{ кт/см}^2, \quad E_y = 140\,000 \text{ кт/см}^2, \quad E_z = 230\,000 \text{ кт/см}^2,$$

$$\nu_{xy} = 0,2, \quad \nu_{yz} = 0,4, \quad \nu_{xz} = 0,1, \quad G_{xy} = 72\,000 \text{ кт/см}^2,$$

$$\eta(t, \tau) = 0,504 (1 - e^{-0,03(t-\tau)}).$$

Ջերմային խնդիրը Ֆուրիեի ձևախոսքի օգնությամբ բերվում է բնղճանուր գիֆերենցիալ համասարման լուծմանը:

Կենտակոտային խնդրի հիմնական համասարման լուծման համար օգտագործված է Ի. Յա. Շտաերմանի մեթոդը:

Ուսումնասիրված է երկու իրար հետ կապված կոշտ շտամպների ազդեցության ջերմային կհասային ազդուր ունեցող կիսահարթության վրա:

A. M. SIMONIAN

PLANE TEMPERATURE PROBLEMS OF CONTACT OF ORTHOTROPIC BODIES WITH CONSIDERATION OF CREEP

Summary

In the present paper the pressure in the area of contact of two compressed orthotropic bodies found in the temperature flow under plane strain (a case for a number of contact areas) is investigated.

The temperature problem with the help of Fourier transformation is brought to the solution of ordinary differential equations.

The method of Shtaerman is used for the solution of the principal equation of contact problems.

The effect of two connected rigid stamps on a semi-plane with a point heat source is observed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, 1952.
2. Симонян А. М. Плоская контактная задача ортотропных тел с учетом ползучести. Известия АН АрмССР, Механика, т. 19, № 4, 1966.
3. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 12, № 2, 1959.
4. Прокопович И. Е. О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. 20, вып. 6, 1956.
5. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
6. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, 1958.
7. Паркус Г. Неуставовившиеся температурные напряжения. Физматгиз, 1963.
8. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехтеоретиздат, 1947.
9. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, т. 12, вып. 1, 1948.
10. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.