ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XIX, № 6, 1966 Механика

М. А. АЛЕКСАНДРЯН

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА С КОМПЛЕКСНЫМ ИНДЕКСОМ ПРИ ЧИСТО МНИМЫХ АРГУМЕНТАХ

Многие задачи теории упругости, связанные с интегрированием уравнения Лапласа в специальных системах ортогональных криволинейных координат (сферических, сфероидальных, тороидальных и других), применяющихся при рассмотрении краевых задач для областей соответствующего вида, приводятся к уравнению Лежандра [1], [2]

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+n(n+1)u=0. \tag{1}$$

Как известно, решениями уравнения (1) являются функции Лежандра $P_n(z)$ и $Q_n(z)$. Эти функции достаточно хорошо изучены, и для них имеются интегральные представления, когда аргумент z действительный, а индекс n — любое комплексное число $\mathrm{Re}(n)>-1$ [1], [2]. Эти интегральные представления успешно применяются при решении задач теории упругости методом интегральных преобразований [3]. Однако, при решении задач в сжатых сфероидальных координатах [1], [2], [4] встречаются функции Лежандра с чисто мнимым аргументом вида $P_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$ и $Q_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$, для которых не имеются интегральные представления. Некоторые вопросы, связанные с разложением произвольных функций в интеграл по сферическим функциям такого вида, исследованы в работе [5].

Настоящая заметка посвящена получению одного интегрального представления для этих функций.

Известно [6], что функция Лежандра первого рода $P_n(z)$ при любом комплексном n выражается через интеграл Шлефли

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-z)^{n+1}}dz, \tag{2}$$

где Γ — произвольный замкнутый контур, выбранный так, чтобы выражение $\dfrac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+2}}$ с точками ветвления $(1,\ -1,\ z)$ приняло свое исходное значение при обходе контура Γ.

Если $\mathrm{Re}(z)>0$, то за контур Γ можно принять окружность с центром в точке z и с радиусом $(z^2-1)^{1/2}$, так как при этом точка $t=1$ оказывается внутри, а $t=-1$ — вне контура Γ, и поэтому, как в этом легко убедиться, вышеуказанное условие выполняется [5].

Произведя под интегралом (2) замену переменных: $t=z+(z^2-1)^{1/2}e^{i\varphi}$ и $h=z+(z^2-1)^{1/2}\cos\varphi$, где φ—промежуточный аргумент, для $P_n(z)$ получим формулу [5]

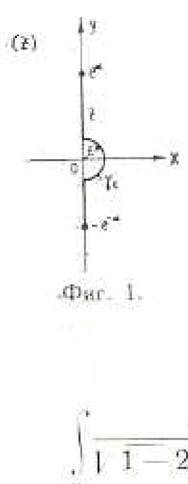
$$P_n(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{z-(z^2-1)^{1/2}}^{z+(z^2-1)^{1/2}}\frac{h^n}{(1-2hz+h^2)^{1/2}}dh. \qquad (3)$$

Здесь за контур интегрирования можно взять простую дугу, соединяющую отмеченные точки и оставляющую точку $h=0$ слева [1].

В случае $\mathrm{Re}(z)>0$, например, при $z=\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ этой дугой может служить отрезок прямой, соединяющий точки $e^{-i\theta}$ и $e^{i\theta}$. При этом из (3) оказывается возможным получить интегральное представление для $P_n(\cos\theta)$, известное как интеграл Мелера-Дирихле

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}d\theta. \qquad (4)$$

Однако, в интересующем нас случае чисто мнимых z, аналогичное преобразование будет возможным, если только за путь интегрирования взять вместо отрезка прямой контур, указанный на фиг. 1, где положено $z=i\,\mathrm{sh}\,\alpha$ и, следовательно, концами контура будут $h=-ie^{-\alpha}$ и $h=ie^{\alpha}$. Как видно из рисунка, путь интегрирования состоит из трех участков: прямой—от точки $-ie^{-\alpha}$ до $-i\varepsilon$, полуокружности γ_ε радиуса ε и прямой от точки $i\varepsilon$ до ie^{α}. Докажем, что при $\mathrm{Re}(n)>-1$ за путь интегрирования опять можно взять отрезок прямой, соединяющий точки $-ie^{-\alpha}$ и ie^{α}, так как интеграл по полуокружности γ_ε стремится к нулю, когда $\varepsilon\to 0$. В самом деле, полагая $h=\varepsilon e^{i\varphi}$, $n=\sigma+i\tau$, получим



Фиг. 1.

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{h^n}{\sqrt{1-2i\,\mathrm{sh}\,\alpha h+h^2}}dh=i\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-\tau\varphi}e^{i(\sigma\varphi+\varphi+\tau\ln\varepsilon)}\varepsilon^{1+\sigma}}{\sqrt{1-2i\varepsilon e^{i\varphi}\,\mathrm{sh}\,\alpha+\varepsilon^2e^{2i\varphi}}}d\varphi,$$

откуда видно, что при $\mathrm{Re}(n)>-1$ этот интеграл стремится к нулю вместе с ε.

Таким образом, доказано, что

$$P_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-ie^{-\alpha}}^{ie^{\alpha}}\frac{h^{-1/2+i\tau}}{(1-2ih\,\mathrm{sh}\,\alpha+h^2)^{1/2}}dh, \qquad (5)$$

где в подинтегральном выражении аргументы многозначных функций должны быть выбраны так, чтобы $\arg(1-2ih\operatorname{sh}\alpha+h^2)$ стремился к нулю, когда h стремится к $+\infty$ вдоль положительной действительной оси.

Полагая в формуле (5) $h=iy$, получим

$$P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-e^{-\alpha}}^{0}\frac{(iy)^{-1/2+i\tau}}{\sqrt{(e^{\alpha}-y)(e^{-\alpha}+y)}}\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{e^{\alpha}}\frac{(iy)^{-1/2+i\tau}}{\sqrt{(e^{\alpha}-y)(e^{-\alpha}+y)}}\,dy. \tag{6}$$

Произведя замену переменных: в первом интеграле $y=-e^{-t}$, а во втором $y=e^{t}$, после ряда преобразований получим интегральное представление

$$P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)=\frac{1+i}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\pi\tau}{2}}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-i\tau t}}{\sqrt{2(\operatorname{sh}t-\operatorname{sh}\alpha)}}\,dt+$$

$$+\frac{1-i}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha}\frac{e^{i\tau t}}{\sqrt{2(\operatorname{sh}\alpha-\operatorname{sh}t)}}\,dt, \tag{7}$$

которое после разделения вещественной и мнимой частей примет вид

$$P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)=\frac{1}{2\pi}\Bigg[e^{\frac{\pi\tau}{2}}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{\cos\tau t+\sin\tau t}{\sqrt{\operatorname{sh}t-\operatorname{sh}\alpha}}\,dt+$$

$$+e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha}\frac{\cos\tau t+\sin\tau t}{\sqrt{\operatorname{sh}\alpha-\operatorname{sh}t}}\,dt+$$

$$+i\left(e^{\frac{\pi\tau}{2}}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{\cos\tau t-\sin\tau t}{\sqrt{\operatorname{sh}t-\operatorname{sh}\alpha}}\,dt-e^{-\frac{\pi\tau}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha}\frac{\cos\tau t-\sin\tau t}{\sqrt{\operatorname{sh}\alpha-\operatorname{sh}t}}\,dt\right)\Bigg]. \tag{7*}$$

Однако, в приложениях удобно иметь вместо (7) и (7*) представления, содержащие интегралы лишь по одному из промежутков от α до ∞, от 0 до α или от 0 до ∞ [1], [2], [3]. Пользуясь тождеством [1]

$$P_{-1/2+i\tau}(z)=P_{-1/2-i\tau}(z),$$

из (7*) легко получить следующие соотношения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\alpha}\frac{\sin\tau t}{\sqrt{\operatorname{sh}\alpha-\operatorname{sh}t}}\,dt=-\operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{\cos\tau t}{\sqrt{\operatorname{sh}t-\operatorname{sh}\alpha}}\,dt, \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{\cos \tau t}{\sqrt{\operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh} t}}\, dt = \operatorname{cth} \frac{\pi\tau}{2} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \tau t}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \alpha}}\, dt. \tag{9}$$

Эти соотношения позволяют придать формуле (7*) окончательный вид

$$P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha) = \frac{\operatorname{cth} \pi\tau}{\pi} \left[\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{2} + \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \alpha}}\, dt + \right.$$

$$\left. + i \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{2} - \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \alpha}}\, dt \right]. \tag{10}$$

Аналогичным образом из соотношений (8) и (9) можно получить интегральное представление для интеграла $(-\infty, \alpha)$ в виде

$$P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha) = \frac{\operatorname{cth} \pi\tau}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{2} - \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh} t}}\, dt - \right.$$

$$\left. - i \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{2} + \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh} t}}\, dt \right]. \tag{11}$$

Так как дифференциальное уравнение Лежандра, решением которого является функция $P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)$, имеет действительные коэффициенты, то функции $\operatorname{Re}[P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)]$ и $\operatorname{Jm}[P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)]$ также являются решениями этого дифференциального уравнения. Поэтому общее решение уравнения Лежандра можно представить в виде

$$C_1 \operatorname{Re}[P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)] + C_2 \operatorname{Jm}[P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)].$$

В частных случаях, когда $C_1 = C_2$ и $C_1 = -C_2$, получаем следующие функции:

$$p_\tau(\alpha) = \frac{1}{2} \{\operatorname{Re}[P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)] + \operatorname{Jm}[P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)]\} =$$

$$= \frac{\operatorname{cth} \pi\tau \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{2}}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos \tau t}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \alpha}}\, dt, \tag{12}$$

$$q_\tau(\alpha) = \frac{1}{2} \{\operatorname{Re}[P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)] - \operatorname{Jm}[P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)]\} =$$

$$= \frac{\operatorname{cth} \pi\tau \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \tau t}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \alpha}}\, dt. \tag{13}$$

К функциям $p_\tau(\alpha)$ и $q_\tau(\alpha)$ можно придти также исходя из интегрального представления для функции Лежандра второго рода $Q_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$. Учитывая формулы (8) и (9), функции $p_\tau(\alpha)$ и $q_\tau(\alpha)$ можно представить также в виде

$$p_\tau(\alpha)=-\frac{\mathrm{cth}\,\pi\tau\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi\tau}{2}}{\pi}\left[\int_0^\alpha\frac{\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha-\mathrm{sh}\,t}}\,dt-\int_0^\infty\frac{\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha+\mathrm{sh}\,t}}\,dt\right], \tag{12*}$$

$$q_\tau(\alpha)=\frac{\mathrm{cth}\,\pi\tau\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\tau}{2}}{\pi}\left[\int_0^\alpha\frac{\cos\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha-\mathrm{sh}\,t}}\,dt+\int_0^\infty\frac{\cos\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha+\mathrm{sh}\,t}}\,dt\right]. \tag{13*}$$

Так как $p_\tau(\alpha)$ и $q_\tau(\alpha)$ имеют простой вид, то в приложениях вместо $P_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$ и $Q_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$ удобно пользоваться именно этими функциями [6].

Интегральное представление можно получить также и для $Q_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$. Пользуясь [1] формулой

$$Q_n(z)=\int_0^{z-\sqrt{z^2-1}}\frac{h^n}{(1-2zh+h^2)^{1/2}}\,dh, \tag{14}$$

при $z=i\,\mathrm{sh}\,\alpha$ и $n=-{}^1/_2+i\tau$ получим

$$Q_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)=\int_0^{-ie^{-\alpha}}\frac{h^n}{(1-2i\,\mathrm{sh}\,\alpha h+h^2)^{1/2}}\,dh. \tag{15}$$

Сделав замену переменных по формуле $h=-ie^{-t}$, из (15) получим окончательное интегральное представление для $Q_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$

$$Q_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)=\frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}}{2}\left[\int_\alpha^\infty\frac{\cos\tau t-\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sh}\,\alpha}}\,dt-i\int_\alpha^\infty\frac{\cos\tau t+\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sh}\,\alpha}}\,dt\right].$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 23 V 1966

Մ. Ա. ԱՎԵՐԲԱԽՅԱՆ

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԻՆԴԵՔՍՈՎ ԵՎ ԶՈՒՏ ԿԵՂԾ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏՈՎ ԼԵԺԱՆԴՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ստացված է զուտ կեղծ արգումենտով Լեժանդրի կոնական ֆունկցիաների մի ինտեգրալ ներկայացում: Այդպիսի ինտեգրալ ներկայացումները կարող են օգտագործվել առաձգականության տեսության մի շարք խնդիրներ սեղմված սֆերոիդալ կոորդինատներով լուծելիս:

M. A. ALEXANDRIAN

ON AN INTEGRAL REPRESENTATION OF LEGENDRE'S FUNCTIONS, EXPRESSED IN COMPLEX INDEX AND PURE IMAGINARY ARGUMENT

S u m m a r y

In this paper we have arrived at an integral representation for Legendre's cone functions, expressed in pure imaginary argument. Such integral representations are made use of in dealing with a number of elasticity theory problems in spheroidal co-ordinates.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гобсон Е. В.* Теории сферических и эллипсоидальных функций. Изд-во иностр. лит., М., 1952.
2. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, М., 1963.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1963.
4. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
5. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, т. 30, вып. 2, 1966, 252—258.
6. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа, т. 2. Госиздат., М., 1963.
7. *Бабловн А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.