

М. А. ЗАДОЯН

ПЛОСКОЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ
 ПЛАСТИЧЕСКОЙ МАССЫ МЕЖДУ ШЕРОХОВАТЫМИ
 ПОДВИЖНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Задача о плоском равновесии идеально-пластической массы, сжатой между двумя наклонными шероховатыми плитами, впервые решена А. Надаи [1]. Исходя из выражения напряжения, полученного в этой работе, Р. Хилл [2] по жестко-пластической схеме определил характер течения материала через клинообразный канал. В. В. Соколовским [3] исследована осесимметричная задача о равновесии идеально-пластического материала внутри шероховатого жесткого конуса. Им же рассмотрены вышеуказанные плоские и осесимметричные задачи при наличии степенного упрочнения материала. Далее, Р. Т. Шилд [4] исследовал течение обобщенного идеально-пластического материала через шероховатый конический канал. Приведены приложения для случаев материала Губера-Мизеса и Треска.

Эти задачи характерны тем, что течение является радиальным. Благодаря неподвижности жестких поверхностей поперечные скорости не возникают.

В настоящей статье полагаем, что указанные жесткие поверхности смещаются с определенной угловой скоростью. В таких случаях, кроме радиальных, появляются и поперечные скорости, поэтому картина деформированного состояния существенно меняется.

§ 1. Плоская задача. Рассмотрим плоское течение идеально-пластического материала между наклонными шероховатыми жесткими плитами, когда последние вращаются с заданной угловой скоростью вокруг вершины угла (фиг. 1).

На поверхностях плит касательные напряжения, как в [1—4], будем считать известными и равными по величине пластической постоянной k . В силу симметрии рассматриваем половину сектора $0 \leq \theta < \alpha$.

Из физической постановки задачи для касательного напряжения имеем граничные условия

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = 0, \quad \tau_{r\theta}(r, \alpha) = -k. \quad (1.1)$$

Уравнения теории идеально-пластического течения для плоской задачи имеют вид

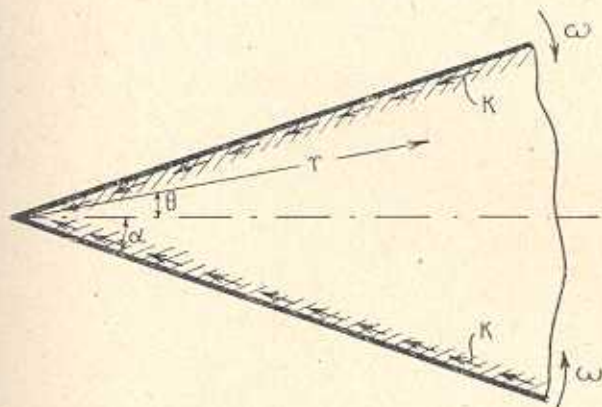
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0, \quad (1.2)$$

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2, \quad (1.3)$$

$$\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{2\tau_{r\theta}} = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2\tau_{r\theta}}, \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0, \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad 2\tau_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$



Фиг. 1.

Решение поставленной задачи ищем в виде:
для напряжения

$$\sigma_r = \sigma_\theta + 2\sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2}, \quad \sigma_\theta = Ak + 2ak \ln r - 2 \int \tau_{r\theta} d\theta, \quad (1.5)$$

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} + 2\sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2} + 2ak = 0,$$

для скоростей перемещения

$$u = r\varepsilon_r, \quad \varepsilon_r = A_0 + 2 \int_0^\theta \tau_{r\theta} d\theta, \quad (1.6)$$

$$v = D_1 r - 2r \int_0^\theta \varepsilon_r d\theta,$$

где $\tau_{r\theta}$, $\tau_{r\theta}$ и ε_r являются лишь функциями от θ , а A , A_0 , a и D_1 — произвольные постоянные.

Выражения (1.5) — (1.6) следуют из [6], если в этой работе в промежуточных соотношениях принять равными нулю ε_z , $\tau_{\theta z}$, τ_{rz} и некоторые произвольные постоянные. Вводя, как в [1—2], новую функцию $\psi(\theta)$:

$$\tau_{r\theta} = -k \sin 2\psi(\theta), \quad (1.7)$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(z) = \frac{\pi}{4}, \quad (1.8)$$

из второго дифференциального уравнения (1.5) получим

$$\frac{d\psi}{d\beta} = \frac{a + \cos 2\psi}{\cos 2\psi}. \quad (1.9)$$

Отсюда

$$\theta = \psi - \frac{a}{2\sqrt{1-a^2}} \ln \frac{(1-a)\operatorname{tg}\psi + \sqrt{1-a^2}}{(1-a)\operatorname{tg}\psi - \sqrt{1-a^2}}, \quad 0 \leq a \leq 1 \quad (1.10)$$

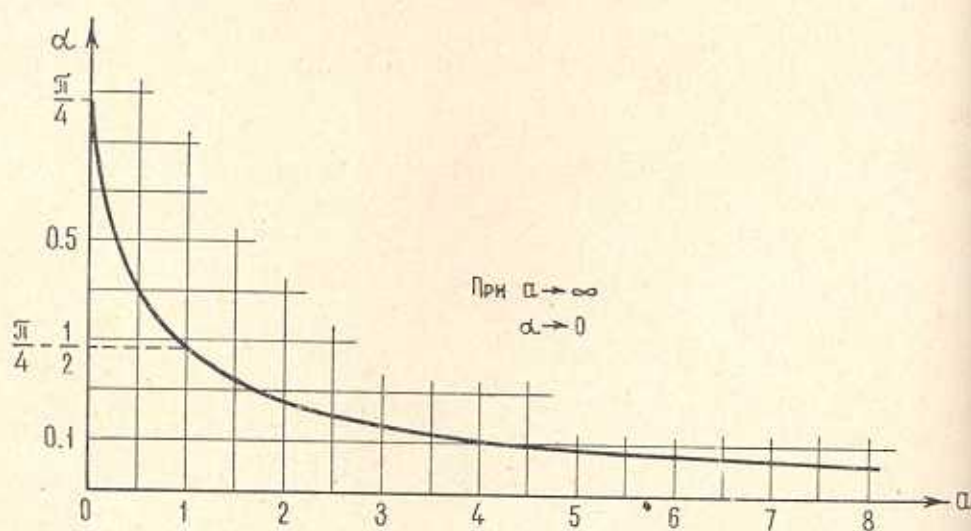
$$\theta = \psi - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \operatorname{tg}\psi \right), \quad a \geq 1.$$

Из второго условия (1.8) для определения a получим соотношения

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2\sqrt{1-a^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-a^2}}{a}, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad (1.11)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \quad a \geq 1.$$

Зависимость между a и α графически показана на фиг. 2. Как видно из графика, полученное решение имеет смысл при $2\alpha \leq \frac{\pi}{2}$.



Фиг. 2.

Компоненты напряжения σ_r и σ_θ , таким образом, окончательно примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{k} &= A + 2a \ln r + \cos 2\psi + a \ln(a + \cos 2\psi), \\ \frac{\sigma_\theta}{k} &= A + 2a \ln r - \cos 2\psi + a \ln(a + \cos 2\psi). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Определим скорости перемещения. Из соотношений (1.4) и (1.6) имеем

$$\varepsilon_r = -\dot{\gamma}_{r\theta} \operatorname{ctg} 2\psi, \quad \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} = 2\dot{\gamma}_{r\theta}. \quad (1.13)$$

Тогда

$$\frac{d\varepsilon_r}{d\theta} + 2\varepsilon_r \operatorname{tg} 2\psi = 0. \quad (1.14)$$

Отсюда будем иметь

$$\varepsilon_r = B(a + \cos 2\psi), \quad (1.15)$$

где B — произвольная постоянная.

Из условий нашей задачи для v имеем

$$v(r, 0) = 0, \quad v(r, \alpha) = -\omega r. \quad (1.16)$$

Первое условие (1.16) дает $D_1 = 0$ и

$$v = -2r \int_0^\psi \varepsilon_r d\theta. \quad (1.17)$$

Из второго условия (1.16) находим

$$B = \frac{\omega}{2(z\alpha + I)}, \quad I = \int_0^\alpha \cos 2\psi d\theta. \quad (1.18)$$

Таким образом, для скоростей перемещения окончательно получим

$$u = \frac{\omega r}{2} \frac{a + \cos 2\psi}{z\alpha + I}, \quad v = -\omega r \frac{a\psi + \int_0^\psi \cos 2\psi d\theta}{z\alpha + I}. \quad (1.19)$$

Нетрудно проверить, что условие сохранения количества масс

$$2 \int_0^\psi ur d\theta = \omega r^2$$

удовлетворяется автоматически.

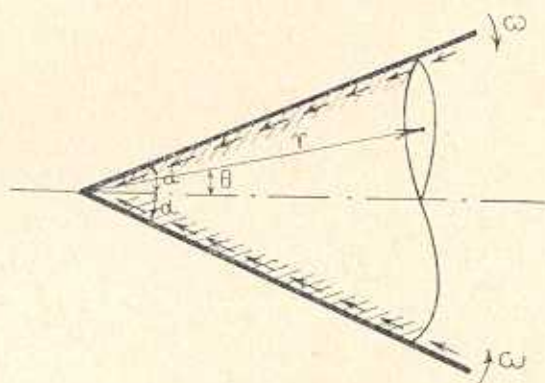
§ 2. Осесимметричная задача. 1°. Рассмотрим теперь течение идеально-пластического материала внутри шероховатого конуса (фиг. 3), когда коническая поверхность суживается с заданной угловой скоростью ω . Воспользуемся сферическими координатами r , θ и φ , где θ — угол между радиусами и положительной осью z , φ — угол между радиусами, измеряемый вокруг оси z вправо.

Из характера течения материала полагаем всюду $\tau_{\theta z} = \tau_{r\varphi} = \omega = 0$.

Величину касательного напряжения $\tau_{r\theta}$ на поверхности конуса полагаем равной пластической постоянной k .

Таким образом, для касательного напряжения имеем граничные условия

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = 0, \quad \tau_{r\theta}(r, \alpha) = -k. \quad (2.1)$$



Фиг. 3.

Уравнения равновесия и условия пластичности Губера-Мизеса для нашей задачи будут

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_z) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] = 0,$$

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{r\theta}^2 = 6k^2. \quad (2.3)$$

Имеем также соотношения между компонентами скоростей деформации, скоростей перемещений и напряжений

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \lambda (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z), \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \lambda (2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z), \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta = \lambda (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta), \quad (2.6)$$

$$2\tau_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 6\lambda \tau_{r\theta}. \quad (2.7)$$

Задачи такого рода, имеющие так называемый „гипотетический“ характер, впервые исследованы Р. Хиллом [2], затем Д. Д. Ивлиевым [5].

Скорости перемещения из (2.5) и (2.7) представим в виде

$$u(r, \theta) = u_0(r) - \int_0^\theta \left(r \frac{\partial v}{\partial r} - v \right) d\theta + 2r \int_0^\theta \tau_{r\theta} d\theta, \quad (2.8)$$

$$v(r, \theta) = v_0(r) - \int_0^\theta u d\theta - r \int_0^\theta (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\theta,$$

где u_0 и v_0 — произвольные функции от r .

Полагая, что тензор скоростей деформации зависит лишь от θ , получим

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_0}{\partial r} - r \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} \theta + 2 \int_0^\theta \gamma_{r\theta}(\theta) d\theta. \quad (2.9)$$

Тогда

$$\frac{\partial u_0}{\partial r} = A_0, \quad -r \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} = A_1, \quad (2.10)$$

где A_0 и A_1 — произвольные постоянные.

Из последних соотношений будем иметь

$$u_0 = A_0 r + C_0, \quad v_0 = A_1 (r - r \ln r) + E_1 r + E_0, \quad (2.11)$$

здесь C_0 , E_1 и E_0 — также произвольные постоянные.

Поскольку

$$r \frac{\partial v}{\partial r} - v = r \frac{\partial v_0}{\partial r} - v_0 + \int_0^\theta u d\theta - r \int_0^\theta \varepsilon_r d\theta, \quad (2.12)$$

то

$$\begin{aligned} u + \int_0^\theta d\theta \int_0^\theta u d\theta &= A_0 r + C_0 + (A_1 r + E_0) \theta + \\ &+ r \int_0^\theta d\theta \int_0^\theta \varepsilon_r d\theta + 2r \int_0^\theta \gamma_{r\theta} d\theta, \end{aligned} \quad (2.13)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = r \varepsilon_r + 2r \gamma'_{r\theta}(\theta) \quad (2.14)$$

$$u(r, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = A_1 r + E_0 + 2r \gamma'_{r\theta}(0). \quad (2.15)$$

Решение дифференциального уравнения (2.14) при условии (2.15) будет

$$u = C_0 \cos \theta + E_0 \sin \theta + r \varepsilon_r(\theta). \quad (2.16)$$

Подставляя выражения u и v_0 во второе соотношение (2.8), находим

$$v = (A_1 + E_1)r - A_1 r \ln r - C_0 \sin \theta - E_0 \cos \theta - r \int_0^\theta (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\theta. \quad (2.17)$$

Из зависимостей (2.6), (2.16) и (2.17) следует $A_1 = C_0 = E_0 = 0$,

$$(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi) \operatorname{tg} \theta + \int_0^{\theta} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) d\theta = E_1, \quad (2.18)$$

Тогда скорости перемещения примут вид

$$\begin{aligned} u &= r\varepsilon_r, & w &= 0, \\ v &= E_1 r - r \int_0^{\theta} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) d\theta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Компоненты напряжений и соотношение (2.9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_0 + \frac{2\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi}{\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\varphi^2}} \sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2}, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_0 + \frac{\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi}{\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\varphi^2}} \sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\varphi^2}} \sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2}, \quad \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} = 2\tau_{r\theta}. \quad (2.21)$$

Определив σ_0 из второго уравнения (2.2)

$$\sigma_0 = H(r) - \int [(\sigma_0 - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] d\theta \quad (2.22)$$

и подставив в первое уравнение, находим

$$r \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta + 3 \frac{\varepsilon_r}{\gamma_{r\theta}} \tau_{r\theta} = 0. \quad (2.23)$$

Отсюда

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta + 3 \frac{\varepsilon_r}{\gamma_{r\theta}} \tau_{r\theta} + \sqrt{3} kM = 0, \quad (2.24)$$

$$H = \sqrt{3} kM \ln r + \sqrt{3} kN, \quad (2.25)$$

где M и N — постоянные интегрирования.

Дифференцируя уравнения (2.9), (2.18) и исключая $\tau_{r\theta}$, получим систему из трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{3\varepsilon_r}{\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\varphi^2}} \sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2} + \sqrt{3} kM = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{d\varepsilon_r}{d\theta} + \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \varepsilon_r = \frac{d\varepsilon_\varphi}{d\theta} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \varepsilon_\varphi, \quad (2.27)$$

$$\frac{d\varepsilon_r}{d\theta} = \frac{2\tau_{r\theta}}{\sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2}} \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\varphi^2}. \quad (2.28)$$

Для рассматриваемой задачи (фиг. 3) имеем

$$v(r, 0) = 0, \quad v(r, \alpha) = -\omega r. \quad (2.29)$$

Тогда, принимая в (2.19) $E_1 = 0$, получим

$$v = -r \int_0^\theta (2\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) d\theta. \quad (2.30)$$

Из уравнения (2.26) можем написать

$$\tau_{r\theta} = -\sqrt{3} kM \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - kJ(\theta), \quad (2.31)$$

где

$$J(\theta) = \frac{3}{\sin \theta} \int_0^\theta \frac{\sin \theta}{F(\theta)} \sqrt{1 - \frac{\tau_{r\theta}^2}{k^2}} d\theta, \quad (2.32)$$

$$F = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_r} + \frac{\varepsilon_\varphi^2}{\varepsilon_r^2}}. \quad (2.33)$$

Из второго условия (2.1) находим

$$M = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} [1 - J(\alpha)]. \quad (2.34)$$

Тогда

$$\tau_{r\theta} = -k[1 - J(\alpha)] \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - kJ(\theta). \quad (2.35)$$

Оценим значение $\tau_{r\theta}$. Обозначим черточкой сверху его значения с избытком, а значения с недостатком — волнистой линией. Легко заметить, что функция F принимает минимальное значение $\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $\varepsilon_\varphi \varepsilon_r = -1/2$. Тогда

$$\tilde{J}(\theta) = 0, \quad \bar{J}(\theta) = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (2.36)$$

Для $\tau_{r\theta}$ будем иметь

$$\tilde{\tau}_{r\theta} = -k \left(1 + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad \bar{\tau}_{r\theta} = -k \left(1 - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad (2.37)$$

причем $\alpha < 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 65^\circ$. Кроме этого, имеем также

$$\tilde{M} = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - 2, \quad \bar{M} = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad (2.38)$$

При малых значениях α формулы (2.37) — (2.38) приближенно записутся

$$\tau_{r\theta} = -k \frac{\theta}{\alpha}, \quad M = \frac{2}{\sqrt{3} \alpha}. \quad (2.39)$$

Уравнения (2.27) можно преобразовать к виду

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \varepsilon_r \right) = \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} + \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \varepsilon_r. \quad (2.40)$$

Интегрированием и преобразованием получим

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r - \frac{3 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_0^\theta \sin \theta \varepsilon_r d\theta. \quad (2.41)$$

Подставляя (2.41) в (2.30) и применяя формулу Дирихле о преобразовании двойного интеграла, находим

$$v = -\frac{3r}{\sin \theta} \int_0^\theta \sin \theta \varepsilon_r d\theta. \quad (2.42)$$

С другой стороны, из уравнения (2.28) можем получить

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r(0) e^{\int_0^\theta \frac{2\varepsilon_r F}{V k^2 - \varepsilon_r^2} d\theta}. \quad (2.43)$$

Подставляя сюда значения $\tau_{r\theta}$ из (2.29) и применяя теорему о среднем, получим

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r(0) e^{-F_0 \alpha + F_0 V \alpha^2 - \theta^2}, \quad (2.44)$$

где F_0 — некоторое неизвестное значение функции F в промежутке от нуля до θ .

Второе условие (2.29) запишется в виде

$$\int_0^\alpha \sin \theta \varepsilon_r d\theta = \frac{\omega}{3} \sin \alpha. \quad (2.45)$$

Определяя из (2.44) и (2.45) значение $\varepsilon_r(0)$, для $\varepsilon_r(\theta)$ будем иметь

$$\varepsilon_r(\theta) = \frac{\omega \sin \alpha e^{F_0 \alpha^2 - \theta^2}}{3 \int_0^\alpha \sin \theta e^{F_0 \alpha^2 - \theta^2} d\theta}. \quad (2.46)$$

Скорости перемещения будут

$$u = r \varepsilon_r(\theta), \quad v = -\omega r \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\int_0^\theta \sin \theta e^{F \sqrt{a^2 - \theta^2}} d\theta}{\int_0^\alpha \sin \theta e^{F \sqrt{a^2 - \theta^2}} d\theta}. \quad (2.47)$$

При $\theta \rightarrow 0$ из (2.41) следует $\varepsilon_z(0) = -\frac{2}{3} \varepsilon_r(0)$. Поскольку $\varepsilon_\theta < 0$, то $\varepsilon_r + \varepsilon_z > 0$. Поскольку $\varepsilon_r > 0$ (2.46), то из (2.41) следует $\varepsilon_r < \varepsilon_r$. Соотношения (2.41) и (2.45) дают

$$\varepsilon_z(z) = \varepsilon_r(z) - \omega \operatorname{ctg} \alpha. \quad (2.48)$$

Так как $\varepsilon_r(0) > \varepsilon_r(z)$, то из (2.45) и (2.48) следует

$$\varepsilon_r(z) < \frac{\omega}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{2}{3} \frac{\omega}{\alpha}, \quad \varepsilon_z(z) < \frac{\omega}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \omega \operatorname{ctg} \alpha \approx -\frac{\omega}{3\alpha}. \quad (2.49)$$

Отсюда заключаем, что для рассматриваемой задачи

$$-1 \leq \varepsilon_z \leq \varepsilon_r \leq -\frac{1}{2}. \quad (2.50)$$

Это значит, что функция F имеет следующие возможные крайние значения

$$\tilde{F} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \bar{F} = 1. \quad (2.51)$$

Исходя из этих значений F , можно получить нижние и верхние значения искомых величин для малых α . Однако, для весьма малых α , полагая $\sin \theta \approx \theta$ и $e^{F \sqrt{a^2 - \theta^2}} \approx 1$, из (2.41), (2.46), (2.47) получим

$$\varepsilon_r = \frac{2}{3} \frac{\omega}{\alpha}, \quad \varepsilon_z = -\frac{1}{3} \frac{\omega}{\alpha}, \quad (2.52)$$

$$u = -\frac{2}{3} \frac{\omega}{\alpha} r, \quad v = -\omega r \frac{\theta}{\alpha}. \quad (2.53)$$

Нормальные компоненты напряжений будут

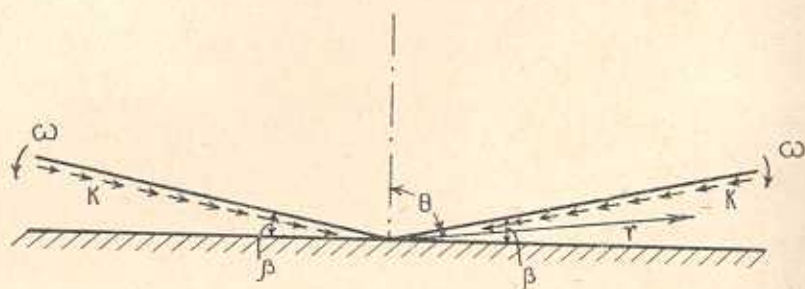
$$\frac{\sigma_r}{\sqrt{3}k} = N + \frac{2}{\alpha} \ln r + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\theta^2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{a^2 - \theta^2}, \quad (2.54)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sqrt{3}k} = N + \frac{2}{\alpha} \ln r + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\theta^2}{\alpha}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta.$$

2. Рассмотрим второй пример, когда система уравнений (2.26) — (2.28) также допускает приближенное интегрирование. Пусть между идеально гладким жестким полупространством и тупой конической шероховатой поверхностью вдавливаются идеально-пластический материал (фиг. 4). Принимаем, что плоскость полупространства $\theta = \frac{\pi}{2}$ непод-

вижна, а коническая поверхность раскрывается с заданной угловой скоростью. Граничные условия будут

$$\tau_{r\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \tau_{r\theta}(r, \alpha) = k, \quad v\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad v(r, \alpha) = \omega r. \quad (2.55)$$



Фиг. 4.

Из уравнения (2.26), аналогично первому примеру, будем иметь

$$\tau_{r\theta} = \sqrt{3} k M \operatorname{ctg} \theta + I(\theta), \quad (2.56)$$

где

$$I(\theta) = \frac{3}{\sin \theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{F(\theta)} \sqrt{1 - \frac{\tau_{r\theta}^2}{k^2}} d\theta. \quad (2.57)$$

Второе условие (2.55) дает

$$M = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha} [1 - I(\alpha)]. \quad (2.58)$$

Подставляя (2.58) в (2.56), получим

$$\tau_{r\theta} = k [1 - I(\theta)] \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \alpha} + I(\theta). \quad (2.59)$$

Очевидно,

$$\tilde{I}(\theta) = 0, \quad \bar{I}(\theta) = 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} \theta. \quad (2.60)$$

Тогда из (2.59) легко найти

$$\tilde{\tau}_{r\theta} = k \left(1 - 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha\right) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad \bar{\tau}_{r\theta} = k \left(1 + 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha\right) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad (2.61)$$

причем $\alpha > \operatorname{arctg} 2\sqrt{3} \approx 74^\circ$. Имеем также

$$\tilde{M} = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha} - 2, \quad \bar{M} = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (2.62)$$

Для значений θ , близких к $\frac{\pi}{2}$, нетрудно заметить, что вместо (2.61) и (2.62) будем иметь

$$\tau_{r\theta} = k \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\frac{\pi}{2} - \alpha}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}. \quad (2.63)$$

Нормальные компоненты напряжения будут

$$\frac{\sigma_r}{\sqrt{3}k} = N + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \alpha} \ln r + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^2}{\frac{\pi}{2} - \alpha} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \alpha} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^2}, \quad (2.64)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sqrt{3}k} = N + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \alpha} \ln r + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^2}{\frac{\pi}{2} - \alpha}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_r.$$

В этом примере $v \left(r, \frac{\pi}{2} \right) = 0$, поэтому из второго соотношения (2.19) получим

$$E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\theta. \quad (2.65)$$

Вместо (2.18) будем иметь

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r = \operatorname{ctg} \theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\theta, \quad (2.66)$$

а для v —

$$v = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\theta. \quad (2.67)$$

При $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ из (2.66) следует, что $\varepsilon_\theta \rightarrow \varepsilon_r$. С другой стороны, пренебрегая $\cos^2 \theta$ по отношению к единице в дифференциальном уравнении (2.27), находим

$$\frac{d}{d\theta} (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{\sin \theta \cos \theta} = 0. \quad (2.68)$$

Решение этого уравнения возьмем в виде

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_r. \quad (2.69)$$

Подставляя $\tau_{r\theta}$ и ε_φ из (2.63) и (2.69) в (2.28), получим уравнение

$$\frac{d\varepsilon_r}{d\theta} = \frac{2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \varepsilon_r}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}}, \quad (2.70)$$

решение которого будет

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r \left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}}. \quad (2.71)$$

Принимая в (2.67) $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_r$ и применяя последнее условие (2.55), определяем

$$\varepsilon_r \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{m}{3P} e^{2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}, \quad P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}} d\theta. \quad (2.72)$$

Для скоростей перемещения получим

$$u = \frac{\omega r}{3P} e^{2\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}}, \quad (2.73)$$

$$v = \frac{\omega r}{P} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}} d\theta.$$

При весьма малых значениях угла $\frac{\pi}{2} - \alpha$, полагая $e^{2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \approx 1$, получим

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = \frac{\omega}{3\alpha}, \quad u = \frac{\omega r}{3\alpha}, \quad v = \omega r \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\frac{\pi}{2} - \alpha}.$$

В силу принятых приближений как в первом, так и во втором примере условие сохранения количества масс, как нетрудно убедиться, удовлетворяется приближенно.

Մ. Ա. ԶԱԳՅԱՆ

ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԶԱՆԳՎԱՄԻ ԶԱՐԹ ԵՎ ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԼՈՍՔԸ ՊՏՏՎՈՂ ԱՆՇԱՐԹ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Ա մ փ ն փ ու լ մ

Իդեալական պլաստիկ դանդաղածի հավասարակշռությունը սեղմված Էրկուտնհարթ կոշտ սալերի միջև (զժ. 1) ուսումնասիրվել է Ա. Նադաիրի [1] կողմից: Ռ. Հիլը [2] կոշտ պլաստիկական սխեմայով որոշել է նյութի հոսքը սեղանի կանալում: Վ. Վ. Սոկոլովսկու [3] և Ռ. Տ. Շիլդի [4] կողմից ուսումնասիրվել է նման խնդրի առանցքափակերիկ ղեպքը: Այս խնդիրները բնորոշ են նրանով, որ նյութի հոսքը ճառագայթային է, այսինքն բնդլախական տեղափոխումներ չեն առաջանում: Մեր հոդվածում նյութը բնդգրկող կոշտ պատերը շարվում են որոշակի անկյունային արագությամբ, որի պատճառով առաջանում են բնդլախական արագություններ: Հարթ ենդրի ղեպքում պլաստիկության տեսության հավասարումները արտահայտվում են (1.2) — (1.4) կապակցություններով: Շոշափող լարման և բնդլախական տեղափոխման համար ունենք (1.1) և (1.16) սահմանային պայմանները: Լարումների բողաղրիչները փնտրվում են (1.5), իսկ տեղափոխումները — (1.7) տեսքով: Վերջնականապես ստանում ենք լարումների համար (1.7), (1.11) և (1.12), իսկ տեղափոխումների համար — (1.19) բունաձևերը:

Առանցքափակերիկ խնդրի ղեպքում ստանում ենք ոչ գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմա (2.26) — (2.28), որը հաջողվում է ինտեգրել մոտավոր — ε -ի փոքր և $\frac{\pi}{2}$ -ին մոտ արժեքների համար:

M. A. ZADOYAN

PLANE AND AXIAL-SYMETRICAL FLOW OF PLASTIC MASS BETWEEN RIGID MOBILE SURFACES

Summary

By semi-reversal means the solution of the problems on plane and axial-symmetrical flow of ideal plastic material between rigid mobile surfaces are given.

In these problems besides radial displacements we also have cross displacements. In case of plane problems the solution is obtained in a closed form. In axial-symmetrical case the problem is brought to a system of three non-linear ordinary equations, the solution of which is obtained in special cases.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Nadai A.* Zeits. f. Phys, v. 30, 1924.
2. *Hill R.* Mathematical theory of plasticity. Oxford, 1950.
3. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. Гостехиздат, М.-Л., 1950.
4. *Шилд Р. Т.* Пластическое течение в сходящемся коническом канале. *Механика*, ИЛ, № 3, 1956.
5. *Ивлев Д. Д.* Некоторые частные решения уравнений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности и обобщение решения Прандтля о сжатии пластического слоя двумя шероховатыми плитами. *ПММ*, в. 5, 1958.
6. *Задоян М. А.* Частное решение уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах. *Докл. АН СССР*, т. 157, № 1, 1964.