

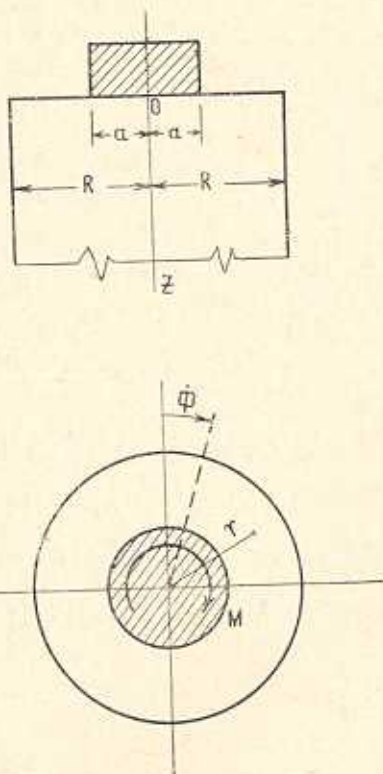
Н. М. БОРОДАЧЕВ, Ф. Н. БОРОДАЧЕВА

### КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О КРУЧЕНИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА, БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КОТОРОГО СВОБОДНА ОТ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассматривается контактная задача теории упругости о кручении упругого полубесконечного цилиндра, вызванного поворотом штампа, сцепленного с этим цилиндром. Штмп имеет плоское круговое основание и расположен на торце цилиндра. Данная задача сведена сначала к парным рядовым уравнениям. Затем эти уравнения сведены к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, решение которого найдено итерационным методом. Получена формула для определения касательных напряжений на площадке контакта и соотношение, устанавливающее связь между приложенным крутящим моментом и углом поворота штампа.

Решение более простой задачи о кручении упругого полупространства, вызванного поворотом штампа, было получено в [9, 10]. Вопрос о применении парных рядовых уравнений к решению контактных задач теории упругости рассматривался в [4—8] и некоторых других работах.

1. Воспользуемся цилиндрической системой координат  $r, \varphi, z$ , ось  $z$  которой совпадает с продольной осью полубесконечного изотропного упругого цилиндра радиуса  $R$ . На торце цилиндра расположен штамп с плоским круговым основанием, сцепленный с цилиндром (фиг. 1). Штамп под действием крутящего момента  $M$  повернут на угол  $\Phi$  вокруг оси  $z$ . Предполагается, что торец цилиндра вне площадки контакта и боковая поверхность цилиндра свободны от напряжений.



Фиг. 1.

В данном случае отлична от нуля только тангенциальная компонента  $v$  вектора перемещений. Функция  $v(r, z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению [1, 3]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1)$$

Что касается тензора напряжений, то отличными от нуля будут лишь две компоненты касательного напряжения

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \tau_{r\tau} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \quad (1.2)$$

Граничные условия для данной контактной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} v &= \Phi r & \text{при} & \quad 0 \leq r < a, & \quad z = 0, \\ \tau_{rz} &= 0 & \text{при} & \quad a < r < R, & \quad z = 0, \\ \tau_{r\tau} &= 0 & \text{при} & \quad r = R, & \quad z \geq 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Далее предполагаем, что перемещение  $v$  и касательные напряжения  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{r\tau}$  остаются ограниченными при  $z \rightarrow \infty$ .

Применяя для решения уравнения (1.1) метод разделения переменных и учитывая условия при  $z \rightarrow \infty$ , находим

$$v(r, z) = A_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(\xi_n r) e^{-\xi_n z}, \quad (1.4)$$

где  $J_1(x)$  — бesselова функция первого рода.

Используя (1.4) и вторую формулу (1.2), находим

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\xi_n r J_1'(\xi_n r) - J_1(\xi_n r)] e^{-\xi_n z}. \quad (1.5)$$

Удовлетворяя третьему граничному условию (1.3), приходим к уравнению

$$\xi_n R J_1'(\xi_n R) - J_1(\xi_n R) = 0. \quad (1.6)$$

Таким образом,  $\xi_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения (1.6), расположенные в порядке возрастания величины.

Слагаемое  $A_0 r$  в формуле (1.4) выражает только жесткое смещение тела и никакого влияния на деформации и напряжения не имеет. Поэтому этот член следует опустить. В результате формула (1.4) примет вид

$$v(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{-1} B_n J_1(\xi_n r) e^{-\xi_n z}, \quad (1.7)$$

где

$$B_n = \xi_n A_n. \quad (1.8)$$

На основании (1.2) и (1.7) имеем

$$\tau_{zr}(r, z) = -\nu \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\xi_n r) e^{-\xi_n z}. \quad (1.9)$$

Удовлетворяя первым двум граничным условиям (1.3) и используя (1.7), (1.9), приходим к парным рядовым уравнениям

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{-1} B_n J_1(\xi_n r) &= \Phi r & \text{при} & \quad 0 \leq r < a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\xi_n r) &= 0 & \text{при} & \quad a < r < R. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из этих уравнений необходимо найти коэффициенты  $B_n$ . Если положить

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \lambda_n = R \xi_n, \quad \varepsilon = \frac{a}{R}, \quad (1.11)$$

то уравнения (1.10) можно представить в такой форме:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} B_n J_1(\lambda_n \rho) &= \Phi \rho & \text{при} & \quad 0 \leq \rho < \varepsilon, \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\lambda_n \rho) &= 0 & \text{при} & \quad \varepsilon < \rho < 1. \end{aligned} \quad (1.12)$$

На основании (1.6) и (1.11) имеем трансцендентное уравнение

$$\lambda_n J_1'(\lambda_n) - J_1(\lambda_n) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$J_2(\lambda_n) = 0. \quad (1.13)$$

Следовательно,  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — положительные корни уравнения (1.13), расположенные в порядке возрастания величины.

2. Для решения парных уравнений (1.12) применим метод, предложенный в работе [12].

Положим

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\lambda_n \rho) = -\frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^{\varepsilon} \frac{g(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \quad \text{при} \quad 0 \leq \rho < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Применяя затем формулу для определения коэффициентов разложения Дини [2], получаем

$$B_n = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^{\varepsilon} g(t) \sin(\lambda_n t) dt \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.2)$$

При этом второе уравнение (1.12) будет удовлетворено. Для того, чтобы удовлетворялось и первое уравнение (1.12), необходимо, чтобы функция  $g(t)$  являлась решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$g(t) = \frac{4}{\pi} \Phi t + \int_0^t g(u) K(t, u) du \quad (2.3)$$

с ядром

$$K(t, u) = \frac{16}{\pi} tu + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{K_2(y)}{I_2(y)} [8tu I_2(y) - \text{sh}(ty) \text{sh}(uy)] dy. \quad (2.4)$$

Здесь  $I_2(y)$ ,  $K_2(y)$  — модифицированные бesselевы функции соответственно первого и второго рода.

Таким образом, рассматриваемая контактная задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.3) с ядром (2.4).

Введем новые переменные

$$t = \varepsilon^2 \beta, \quad u = \varepsilon \alpha, \quad (2.5)$$

тогда интегральное уравнение (2.3) примет вид

$$f(\beta) - \int_0^1 f(\alpha) K^*(\beta, \alpha) d\alpha = \beta, \quad (2.6)$$

где

$$f(\beta) = \frac{\pi}{4\varepsilon\Phi} g(\varepsilon^2\beta), \quad (2.7)$$

$$K^*(\beta, \alpha) = \frac{16}{\pi} \varepsilon^3 \beta \alpha + \frac{4\varepsilon}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{K_2(y)}{I_2(y)} [8\varepsilon^2 \beta \alpha I_2(y) - \text{sh}(\varepsilon^2 \beta y) \text{sh}(\varepsilon \alpha y)] dy. \quad (2.8)$$

Ядро  $K^*(\beta, \alpha)$  можно представить в таком виде

$$K^*(\beta, \alpha) = \frac{16}{\pi} \varepsilon^3 \beta \alpha \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}(\alpha) \beta^{2n}, \quad (2.9)$$

где

$$b_0 = M^* - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{M_{2s-2} \varepsilon^{2s} 2^{2s}}{(2s+1)!}, \quad (2.10)$$

$$b_{2n} = \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n+1)!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{M_{2s-2n} \varepsilon^{2s-2} 2^{2s-2}}{(2s-1)!} \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.11)$$

$$M^* = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{M_{2s-2}}{2^{2s-1} s! (s+2)!}, \quad (2.12)$$

$$M_n = \frac{n!}{2^{n+3}} \sigma_n, \quad (2.13)$$

$$\sigma_n = \frac{2}{\pi} \frac{2^n}{n!} \int_0^{\infty} \frac{K_2(y)}{I_2(y)} y^n dy. \quad (2.14)$$

Численные значения коэффициентов  $\sigma_n$  приведены в работе [11]. Зная  $\sigma_n$ , по формуле (2.13) можно подсчитать коэффициенты  $M_n$ . В табл. 1 приведены численные значения нескольких коэффициентов  $M_n$ .

Таблица 1

$n$	4	6	8	10	12
$M_n$	2,4033	5,8428	54,313	975,61	27936

Для решения интегрального уравнения (2.6) применим итерационный способ, предложенный в работе [13]. Полагая

$$f(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\beta), \quad (2.15)$$

получаем

$$f_{n+1}(\beta) = \int_0^1 f_n(x) K^*(\beta, x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.16)$$

где

$$f_0(\beta) = \beta. \quad (2.17)$$

Из формул (2.9), (2.16) следует, что функции  $f_n(\beta)$  могут быть представлены в таком виде:

$$f_n(\beta) = \beta \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m}^{(n)} \beta^{2m}. \quad (2.18)$$

Используя (2.16) и (2.18), находим

$$Q_{2m}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{2k}^{(n)} c_{2k+2, 2m}, \quad (2.19)$$

где

$$c_{2k+2, 2m} = \frac{16}{\pi} \int_0^1 x^{2k+2} b_{2m}(x) dx \quad (k, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.20)$$

Подставляя выражения для  $b_0$  и  $b_{2n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) из (2.10) и (2.11) в формулу (2.20) и выполняя интегрирование, получаем

$$c_{2k+2, 0} = \frac{16}{\pi} \varepsilon^3 \left[ \frac{M^0}{2k+3} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{M_{2s+2} \varepsilon^{2s}}{(2s+1)!(2s+2k+3)} \right] \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (2.21)$$

$$c_{2k+2, 2m} = -\frac{16}{\pi} \frac{\varepsilon^{2m+3}}{(2m+1)!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{M_{2s+2m} \varepsilon^{2s-2}}{(2s-1)!(2s+2k+1)} \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (m=1, 2, \dots).$$

На основании (2.15) и (2.18) имеем

$$f(\beta) = \beta \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m} \beta^{2m}, \quad (2.22)$$

где

$$Q_{2m} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2m}^{(n)}. \quad (2.23)$$

Таким образом, решение интегрального уравнения (2.6) определяется формулой (2.22). Коэффициенты  $Q_{2m}$  могут быть найдены из (2.23). Для нахождения достаточного количества коэффициентов  $Q_{2m}^{(n)}$  необходимо использовать рекуррентную формулу (2.19).

3. Рассмотрим вопрос об определении касательных напряжений  $\tau_{z\varphi}$  на площадке контакта штампа и упругого тела. На основании (1.9) и (1.11) имеем

$$\tau_{z\varphi}(\rho, 0) = -\mu \sum_{n=1}^{\infty} B_n f_1(\lambda_n \rho).$$

Учитывая далее (2.1), (2.5) и (2.7), находим

$$\tau_{z\varphi}(\rho, 0) = \frac{4\varepsilon\Phi\mu}{\pi} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho/\varepsilon}^1 \frac{f(\beta) d\beta}{\sqrt{\beta^2 - \frac{\rho^2}{\varepsilon^2}}} \quad \text{при } 0 \leq \rho < \varepsilon.$$

Возвращаясь к переменной  $r = R\rho$ , получаем

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = \frac{4\varepsilon\Phi\mu R}{\pi} \frac{d}{dr} \int_{r/a}^1 \frac{f(\beta) d\beta}{\sqrt{\beta^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \quad \text{при } 0 \leq r < a. \quad (3.1)$$

Крутящий момент, примененный к штампу

$$M = -2\pi \int_0^a \tau_{z\varphi}(r, 0) r^2 dr. \quad (3.2)$$

Подставляя в (3.2) выражение для  $\tau_{z\varphi}(r, 0)$  из (3.1) и выполняя интегрирование по  $r$ , находим

$$\Phi = \gamma \frac{3M}{16a^3\mu}, \quad (3.3)$$

где

$$\gamma^{-1} = 3 \int_0^1 \beta f(\beta) d\beta. \quad (3.4)$$

Формула (3.3) устанавливает связь между углом поворота штампа  $\Phi$  и приложенным крутящим моментом  $M$ .

Используя выражения (3.3) и (3.1), получаем следующую формулу для определения касательных напряжений на площадке контакта:

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = \gamma \frac{3M}{4\pi a^2} \frac{d}{dr} \int_{r/a}^1 \frac{f(\beta) d\beta}{\sqrt{\beta^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \quad \text{при } 0 < r < a. \quad (3.5)$$

Если подставить выражение для  $f(\beta)$  из (2.22) в формулы (3.4), (3.5) и выполнить интегрирование, то получим

$$\gamma^{-1} = 3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Q_{2m}}{2m+3}, \quad (3.6)$$

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = \gamma \frac{3Mr}{4\pi a^3 \sqrt{a^2 - r^2}} \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+1)} \binom{m}{k} \times$$

$$\times \left(\frac{r}{a}\right)^{2(m-k)-2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^k \left[2(m-k) - (2m+1) \frac{r^2}{a^2}\right] \quad \text{при } 0 < r < a, \quad (3.7)$$

где  $\binom{m}{k}$  — биномиальные коэффициенты.

По формуле (3.7) можно определить касательные напряжения  $\tau_{z\varphi}$  на площадке контакта штампа и полубесконечного упругого цилиндра. Коэффициент  $\gamma$ , входящий в формулу (3.7), может быть найден из соотношения (3.6). Угол поворота штампа  $\Phi$  определяется формулой (3.3).

4. В полученные выше формулы (3.6) и (3.7) входят коэффициенты  $Q_{2m}$ . Они выражаются через коэффициенты  $Q_{2m}^{(n)}$  с помощью формулы (2.23). На основании (2.17) и (2.18) имеем

$$f_0(\beta) = \beta = \beta \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m}^{(0)} \beta^{2m}.$$

Отсюда

$$Q_0^{(0)} = 1, \quad Q_{2m}^{(0)} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4.1)$$

Остальные коэффициенты  $Q_{2m}^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) находим, используя (4.1) и рекуррентную формулу (2.19). При этом необходимо знать коэффициенты  $c_{2k-2, 2m}$ , которые можно определить по формулам (2.21). Если производить вычисления с точностью до членов порядка  $\varepsilon^{12}$ , то необходимо вычислить 20 коэффициентов  $c_{2k+2, 2m}$  ( $k, m = 0, 1, 2, \dots$ ).

Из-за недостатка места значения коэффициентов  $c_{2k+3, 2m}$  не выписываем.

После определения коэффициентов  $Q_{2m}^{(n)}$  можно определить коэффициенты  $Q_{2m}$ , используя формулу (2.23). В результате находим

$$\begin{aligned} Q_0 &= 1 + 2,0684 \varepsilon^3 - 0,4080 \varepsilon^5 + 4,2782 \varepsilon^6 - 0,0354 \varepsilon^7 - 2,5317 \varepsilon^8 + \\ &\quad + 8,8428 \varepsilon^9 - 0,0604 \varepsilon^{10} + 9,5742 \varepsilon^{11} + \dots, \\ Q_2 &= -0,6800 \varepsilon^5 - 0,1653 \varepsilon^7 - 1,4065 \varepsilon^8 - 0,0549 \varepsilon^9 + 0,2129 \varepsilon^{10} - \\ &\quad - 2,9274 \varepsilon^{11} + \dots, \\ Q_4 &= -0,0827 \varepsilon^7 - 0,0768 \varepsilon^9 - 0,1710 \varepsilon^{10} - 0,0493 \varepsilon^{11} - \dots, \\ Q_6 &= -0,0183 \varepsilon^9 - 0,0329 \varepsilon^{11} - \dots, \\ Q_8 &= -0,0046 \varepsilon^{11} - \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подставляя выражения для  $Q_{2m}$  из (4.2) в формулу (3.6), получаем

$$\gamma^{-1} = 1 + 2,0684 \varepsilon^3 - 0,8160 \varepsilon^5 + 4,2782 \varepsilon^6 - 0,1701 \varepsilon^7 - 3,3756 \varepsilon^8 + \\ + 8,7709 \varepsilon^9 - 0,0059 \varepsilon^{10} + 7,7845 \varepsilon^{11} - \dots \quad (4.3)$$

В данном случае формула (3.7) принимает такой вид:

$$\begin{aligned} \tau_{zr}(r, 0) &= -\gamma \frac{3Mr}{4\pi a^3 \sqrt{a^2 - r^2}} \left[ Q_0 - Q_2 \left( 1 - 2 \frac{r^2}{a^2} \right) - \right. \\ &\quad - \frac{Q_4}{3} \left( 1 + 4 \frac{r^2}{a^2} - 8 \frac{r^4}{a^4} \right) - \frac{Q_6}{5} \left( 1 + 2 \frac{r^2}{a^2} + 8 \frac{r^4}{a^4} - 16 \frac{r^6}{a^6} \right) - \\ &\quad \left. - \frac{Q_8}{7} \left( 1 + 1,6 \frac{r^2}{a^2} + 3,2 \frac{r^4}{a^4} + 12,8 \frac{r^6}{a^6} - 25,6 \frac{r^8}{a^8} \right) - \dots \right] \\ &\quad \text{при } 0 < r < a. \end{aligned} \quad (4.4)$$

По формуле (4.4) можно определить касательные напряжения  $\tau_{zr}$ , возникающие на площадке контакта штампа и упругого полубесконечного цилиндра (боковая поверхность которого свободна от напряжений), скручиваемого посредством поворота сцепленного с ним штампа. Угол поворота штампа определяется формулой (3.3).

Саратовский политехнический  
институт

2 II 1966

Ն. Մ. ԲՈՐՈՎԱՉԵՎ, Ֆ. Ն. ԲՈՐՈՎԱՉԵՎԱ

ԱՌԱՋԳՎԱՆՆ ԿԻՍՄԱՆՎԵՐՋ ԳԼԱՆԻ ՈՒՐՄԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԵՆԳՐԻ  
ՄԱՍԻՆ, ԵՐԲ ԳԼԱՆԻ ԿՈՂՄՆԱՅԻՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅՑԻՆ ԱԶԱՏ Է ԸԱՐՈՒՄՆԵՐԻՑ

Ա մ փ ն փ ու լ

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրը կիսաանվերջ առաձգական զրանի ուրման համար, որը պայմանավորված է արդ զրանին ամրացված շտամպի պտտումով: Նաամպն ունի հարթ շրջանաձև



հիմք և տեղադրված է դիսկի ճակատում: Գլանի ճակատի կոնտակտից ազատ մասը և կողմնալին մակերևույթը ազատ են լարումներից: Գիտարկվող խնդիրն սկզբում հանդիպում է դույզ շարքերով հավասարումների: Այնուհետև այդ հավասարումները բերվում են Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սևտի ինտեգրալ հավասարմանը, որի լուծումը դանվում է իտերացիոն մեթոդով: Ստացված է բանաձև կոնտակտի տեղամասում շոշափող լարումների սրոշման համար և կապակցութլուն կիրառված ոլորող մոմենտի և շտամպի պտտման անկյան միջև:

N. M. BORODACHEV, F. N. BORODACHEVA

## CONTACT PROBLEM ON THE TORSION OF SEMI-INFINITE ELASTIC CYLINDER, THE LATERAL SURFACE OF WHICH IS FREE OF STRESSES

### Summary

The contact problem of the theory of elasticity on the torsion of semi-infinite elastic cylinder is considered. The torsion is caused by the turn of the circular punch. The punch is situated at the end cross section of elastic cylinder and is clamped with the cylinder. The end cross section outside the surface of contact and the lateral surface of the cylinder are free of stresses. This problem at first is reduced to dual relations involving Dini series. Then these series of relations are reduced to a Fredholm integral equation of the second kind. The solution of the Fredholm integral equation is obtained by the iterative method.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. ИЛ, М., 1949.
3. Аля А. Математическая теория упругости. М.-Л., ОНТИ, 1935.
4. Абрамян Б. А., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 28, вып. 4, 1964.
5. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
6. Бородачев Н. М. Плоская контактная задача для упругого тела конечной ширины. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 2.
7. Топоян В. С. Об одной плоской контактной задаче для упругой четверть-плоскости. Докл. АН Арм. ССР, т. 37, № 3, 1963.
8. Топоян В. С. Плоская контактная задача для упругой четверть-плоскости с неподвижной вертикальной кромкой. Докл. АН Арм. ССР, т. 37, № 5, 1963.
9. Reissner E., Sagoci H. F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. I. Journ. of Appl. Phys., vol. 15, № 9, 1944.
10. Sneddon I. N. Note on a boundary value problem of Reissner and Sagoci. Journ. of Appl. Phys., vol. 18, № 1, 1947.
11. Ling C. B. Torsion of a circular cylinder having a spherical cavity. Quart. of Appl. Math., vol. 10, № 2, 1952.
12. Srivastav R. P. Dual series relations. II. Dual relations involving Dini series. Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh, A, vol. 66, pt. 3, 1962 — 63.
13. Sneddon I. N., Tait R. J. The effect of a penny-shaped crack on the distribution of stress in a long circular cylinder. Int. Journ. Eng. Sci., vol. 1, № 3, 1963.