ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XIX, № 5, 1966 Механика

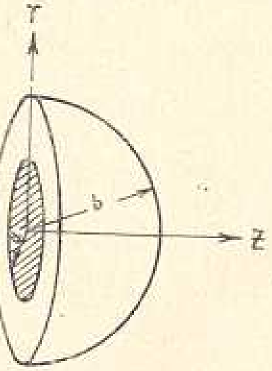
А. А. БАБЛОЯН, Н. О. ГУЛКАНЯН

КРУЧЕНИЕ ПОЛУСФЕРЫ

Задачи о кручении полусферы рассматривались в работах Абрамяна Б. Л., Баблояна А. А., Гулканян Н. О.

Абрамян Б. Л. [1] решил задачу о кручении полой полусферы, когда она скручивается нагрузкой, приложенной на поверхности произвольным образом. Абрамян Б. Л. и Гулканян Н. О. [2] рассмотрели задачу о кручении двухслойной полой полусферы, когда она скручивается произвольной осесимметричной нагрузкой. Кручение полой полусферы, когда часть ее торца закреплена и она скручивается произвольной осесимметричной нагрузкой, рассмотрено Абрамяном Б. Л. и Баблояном А. А. [3]. В работе [4] в качестве примера Баблояном А. А. рассмотрена задача о кручении усеченного шара, когда скручивание осуществляется поворотом жесткого круглого штампа, закрепленного центрально на плоской части граничной поверхности, при закрепленной сферической части поверхности усеченного шара.

В настоящей статье рассмотрена задача о кручении полусферы, скручиваемой посредством поворота сцепленного с ней жесткого штампа, когда на сферической части поверхности заданы перемещения. Решение задачи получено в сферических координатах способом, отличным от работы [4]. Примененный здесь способ решения дает возможность решать задачу не только, когда на сферической поверхности заданы перемещения (как это имеет место при использовании способа [4]), но и напряжения. Задача сведена к решению парных интегральных уравнений, которые в свою очередь сведены к определению некоторой функции из интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.



Фиг. 1.

Рассмотрим полусферу (фиг. 1), на одной части торца которой заданы перемещения, а на другой—напряжения, на сферической поверхности заданы перемещения.

Задачу будем решать при помощи функции перемещения $\Psi(r, z)$, которая внутри области осевого сечения удовлетворяет уравнению Митчела

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

а на границе области осевого сечения — условиям

$$
\begin{gathered}
v = \varkappa r \quad (r < a, \ z = 0), \\
\tau_r = f(r) \quad (a < r < b, \ z = 0), \\
v = \gamma r \quad \left(r = b, \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right).
\end{gathered} \tag{2}
$$

Напряжения τ_r, τ_z и перемещение v выражаются через функцию перемещения формулами

$$
\tau_r = Gr \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \tau_z = Gz \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v = r \Psi(r, z), \tag{3}
$$

где G — модуль сдвига.

Перейдем к новой системе координат

$$
t = \ln \frac{b}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad \xi = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}.
$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + (1 - \xi^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - 4\xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - 3 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \tag{4}
$$

а условия (2) — в виде

$$
\begin{gathered}
v = \varkappa b e^{-t} \quad (\xi = 0, \ t_1 < t < \infty), \\
\tau_\xi = f(t) \quad (\xi = 0, \ 0 < t < t_1), \\
v = \gamma b \sqrt{1 - \xi^2} \quad (0 < \xi < 1, \ t = 0),
\end{gathered} \tag{5}
$$

где

$$
t_1 = \ln \frac{b}{a}.
$$

Напряжения в этой системе координат будут определяться по формулам

$$
\tau_\xi = -G(1 - \xi^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad \tau_t = -G\sqrt{1 - \xi^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.
$$

Функцию $\Psi(t, \xi)$ будем искать в виде

$$
\Psi(t, \xi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-2kt} P'_{2k+1}(\xi) +
$$

$$
+ e^{3/2 t} \int_0^\infty D(\lambda) P'_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\xi) \sin \lambda t \, d\lambda. \tag{6}
$$

Удовлетворяя третьему из условий (5), будем иметь

$$
\gamma = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k P'_{2k+1}(\xi),
$$

откуда

$$A_0=\gamma, \quad A_k=0. \tag{7}$$

Удовлетворяя первым двум условиям (5), получим парные интегральные уравнения

$$\begin{gathered}\int_0^\infty D(\lambda)\,P'_{-\frac{1}{2}+\lambda i}(0)\sin\lambda t\,d\lambda=-\frac{1}{G}f(t)\,e^{-\frac{3}{2}t} \quad (0<t<t_1),\\ \int_0^\infty D(\lambda)\,P'_{-\frac{1}{2}+\lambda i}(0)\sin\lambda t\,d\lambda=(\varkappa-\gamma)\,e^{-\frac{3}{2}t} \qquad (t_1<t<\infty).\end{gathered} \tag{8}$$

Обозначая

$$D(\lambda)\,P'_{-\frac{1}{2}+\lambda i}(0)=A(\lambda),$$

систему парных интегральных уравнений (8) приведем к виду

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \lambda[1+N(\lambda)]\,A(\lambda)\sin\lambda t\,d\lambda=\frac{1}{G}f(t)\,e^{-\frac{3}{2}t} \quad (0<t<t_1),\\ \int_0^\infty A(\lambda)\sin\lambda t\,d\lambda=(\varkappa-\gamma)e^{-\frac{3}{2}t} \qquad (t_1<t<\infty),\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$-N(\lambda)=1+\frac{P_{-\frac{1}{2}+\lambda i}(0)}{\lambda P'_{-\frac{1}{2}+\lambda i}(0)}=1-\frac{\lambda^2+\frac{9}{4}}{2\lambda}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{\lambda i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{\lambda i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{\lambda i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}-\frac{\lambda i}{2}\right)}.$$

Отсюда видно, что при $\lambda\to 0$ $N(\lambda)$ обращается в бесконечность, как $\frac{c}{\lambda}$. Пользуясь асимптотическими разложениями для функций Лежандра, можно показать, что при больших значениях λ

$$-N(\lambda)=\frac{3}{8\lambda^2}\left(1+\frac{5}{16\lambda^2}\right)+0\left(\frac{1}{\lambda^6}\right).$$

Принимая во внимание работы Нобля [5], Трантера [6] и др., легко видеть, что если решение парных интегральных уравнений (9) представить в виде

$$\frac{\pi}{2}A(\lambda)=\int_0^{t_1} J_1(\lambda y)\,G(y)\,dy-(\varkappa-\gamma)\int_{t_1}^\infty yJ_1(\lambda y)\,dy\,\frac{d}{dy}\int_y^\infty\frac{e^{-\frac{3}{2}u}\,du}{\sqrt{u^2-y^2}}, \tag{10}$$

где $G(y)$ — произвольная функция, подлежащая определению в дальнейшем, то второе из уравнений (9) удовлетворяется тождественно.

Проинтегрируем (10) по частям и подставим в первое уравнение (9). Меняя порядок интегрирования, после некоторых преобразований получим

$$\int_0^t G'(y)\frac{dy}{\sqrt{t^2-y^2}}=\frac{1}{G}e^{-\frac{3}{2}t}f(t)-\int_0^{t_1}G'(y)\,dy\int_0^\infty N(\lambda)J_0(\lambda y)\times$$

$$\times\sin\lambda t\,d\lambda+\int_{t_1}^\infty F'(y)\,dy\int_0^\infty N(\lambda)J_0(\lambda y)\sin\lambda t\,d\lambda+$$

$$+[G(t_1)+F(t_1)]\int_0^\infty N(\lambda)J_0(\lambda y)\sin\lambda t\,d\lambda-$$

$$-J_0(0)\,G(0)\int_0^\infty[1+N(\lambda)]\sin\lambda t\,d\lambda. \tag{11}$$

Здесь

$$F(y)=(\varkappa-\gamma)\,y\frac{d}{dy}\int_y^\infty\frac{e^{-\frac{3}{2}u}}{(u^2-y^2)^{1/2}}\,du.$$

Рассматривая соотношение (11) как интегральное уравнение Абеля относительно функции $G'(y)$ и пользуясь формулой обращения для этого уравнения, после ряда выкладок для определения $G(y)$ получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$G(x)=\int_0^{t_1}G(y)\,K(x,y)\,dy+P(x)\qquad(0<x<t_1), \tag{12}$$

где введены следующие обозначения

$$K(x,y)=-x\int_0^\infty\lambda N(\lambda)J_1(\lambda x)J_1(\lambda y)\,d\lambda,$$

$$P(x)=\frac{3}{2}(\varkappa-\gamma)\int_{t_1}^\infty yK_1\left(\frac{3}{2}y\right)K(x,y)\,dy-$$

$$+\frac{2}{\pi G}\int_0^x\frac{yf(y)\,e^{-\frac{3}{2}x}\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}}, \tag{13}$$

$K_1(z)$ — функция Макдональда.

Покажем, что интегральное уравнение (12) можно решать методом последовательных приближений, т. е. покажем, что

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_1} K^2(x, y)\,dxdy < 1 \quad \text{или} \quad \int_0^{t_1} |K(x, y)|\,dy < 1 \quad (0 < x < t_1).$$

В уравнении (12) перейдем к новым переменным $x_1 = \dfrac{x}{t_1}$, $y_1 = \dfrac{y}{t_1}$.

При этом уравнение примет вид

$$G(x, t_1) = t_1 \int_0^1 G(y, t_1)\, K(x_1 t_1, y_1 t_1)\, dy_1 +$$

$$+ \frac{3t_1^2}{2}(\varkappa - \gamma) \int_1^{\infty} y_1 K_1\left(\frac{3}{2} y_1 t_1\right) K(x_1 t_1, y_1 t_1)\, dy_1 +$$

$$+ \frac{2t_1}{\pi G} \int_0^{x_1 t_1} \frac{y_1 f(y_1 t_1)\, e^{-3/_2 y_1 t_1}}{\sqrt{x_1^2 - y_1^2}}\, dy_1. \tag{14}$$

Для простоты рассмотрим случай $t_1 = 1$. Ядро интегрального уравнения (13) выражается несобственным интегралом, который сходится медленно, т. к. функция $\lambda N(\lambda)$ при больших значениях аргумента имеет асимптотику

$$\lambda N(\lambda) = \frac{3}{8\lambda}\left(1 + \frac{5}{16\lambda^2}\right) + 0\left(\frac{1}{\lambda^5}\right). \tag{15}$$

Пользуясь (15), представим ядро (13) в виде

$$-K(x, y) = x \int_0^{\infty} \left(\lambda N(\lambda) - \frac{3}{8\lambda}\right) J_1(\lambda x)\, J_1(\lambda y)\, d\lambda +$$

$$+ \frac{3}{8} x \int_0^{\infty} \frac{J_1(\lambda x)\, J_1(\lambda y)}{\lambda}\, d\lambda = x \int_0^{\infty} \left(\lambda N(\lambda) - \frac{3}{8\lambda}\right) J_1(\lambda x)\, J_1(\lambda y)\, d\lambda +$$

$$+ \frac{3y}{16} = x \int_0^{25} \left(\lambda N(\lambda) - \frac{3}{8\lambda}\right) J_1(\lambda x)\, J_1(\lambda y)\, d\lambda +$$

$$+ x \int_{25}^{\infty} \left(\lambda N(\lambda) - \frac{3}{8\lambda}\right) J_1(\lambda x)\, J_1(\lambda y)\, d\lambda + \frac{3y}{16}. \tag{16}$$

$$(x \geqslant y)$$

Учитывая (15) и асимптотические разложения бесселевых функций при больших значениях аргумента, оценим второй интеграл в выражении (16)

$$\int_{25}^{\infty}\left(\lambda N(\lambda)-\frac{3}{8\lambda}\right)J_1(\lambda x)\,J_1(\lambda y)\,d\lambda<\frac{5}{16}\int_{25}^{\infty}\frac{1}{\lambda^3}\,|J_1(\lambda x)|\,|J_1(\lambda y)|\,d\lambda<$$

$$<\frac{5}{8\pi}\int_{25}^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^4}<2\cdot 10^{-6}.$$

Следовательно, ядро (13) с точностью до $2\cdot 10^{-6}$ можно представить в виде

$$K(x,\ y)=-x\int_{0}^{25}\left(\lambda N(\lambda)-\frac{3}{8\lambda}\right)J_1(\lambda x)\,J_1(\lambda y)\,d\lambda-\frac{3y}{16}. \qquad (17)$$

Некоторые значения ядра, вычисленные по формуле (17), приведены в табл. 1.

Пользуясь табл. 1, нетрудно вычислить значения следующих интегралов

$$\max\int_{0}^{1}|K(x,\ y)|\,dy=0{,}11721<1,$$

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}K^2(x,\ y)\,dxdy=0{,}00723<1.$$

Таким образом, мы показали, что интегральное уравнение (14) при $t_1=1$ можно решать методом последовательных приближений.

Если $t_1<1$, то из выражения ядра видно, что интегральное уравнение (14) тем более может быть решено методом последовательных приближений, так как в этом случае, благодаря наличию коэффициента $t_1<1$, ядро принимает значения меньшие, чем при $t_1=1$.

Пользуясь табл. 1, интегральное уравнение (12) также можно решать приближенно методом сведения его к решению системы десяти алгебраических уравнений с десятью неизвестными, которые являются значениями искомой функции в точках $x=\frac{k}{10}$ $(k=1,\ 2,\cdots,\ 10)$.

Учитывая поведение бесселевых функций при больших значениях аргумента, а также непрерывность и монотонность функции $\lambda N(\lambda)$ (см. формулу (15)), легко показать, что выражение $t_1K(x_1t_1,\ y_1t_1)$ монотонно возрастает, но остается ограниченным. Поэтому

$$\int_{0}^{1}|t_1K(x_1t_1,\ y_1t_1)|\,dx_1<C_1(t_1),\qquad \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}t_1^2K^2(x_1t_1,\ y_1t_1)\,dx_1dy_1<C_2(t_1),$$

где постоянные $C_1(t_1)$ и $C_2(t_1)$ при очень больших значениях t_1 могут быть, возможно, и больше единицы.

Таблица 1

Значения — $K(x, y)$

y \ x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,01886	0,01917	0,01955	0,02002	0,02048	0,02093	0,02137	0,02173	0,02203	0,02219
0,2	0,00959	0,03825	0,03903	0,03994	0,04089	0,04180	0,04266	0,04334	0,04386	0,04414
0,3	0,00652	0,02602	0,05839	0,05972	0,06112	0,06247	0,06374	0,06476	0,06553	0,06596
0,4	0,00501	0,01997	0,04479	0,07930	0,08112	0,08290	0,08454	0,08590	0,08689	0,08748
0,5	0,00410	0,01636	0,03667	0,06490	0,10082	0,10300	0,10500	0,10666	0,10790	0,10865
0,6	0,00340	0,01393	0,03124	0,05527	0,08583	0,12269	0,12501	0,12698	0,12847	0,12940
0,7	0,00305	0,01219	0,02731	0,04831	0,07500	0,10715	0,14454	0,14577	0,14849	0,14962
0,8	0,00272	0,01083	0,02428	0,04295	0,06666	0,09524	0,12842	0,16600	0,16798	0,16931
0,9	0,00245	0,00975	0,02184	0,03862	0,05994	0,08564	0,11549	0,14932	0,18684	0,18841
1,0	0,00222	0,00883	0,01979	0,03499	0,05432	0,07764	0,10473	0,13545	0,16957	0,20693

Таким образом, целесообразно для $t_1 < t_0$ (t_0 — некоторое большое число, при котором $C_1(t_1)$ и $C_2(t_1)$ все еще меньше единицы) свести задачу к решению интегрального уравнения (12). В случае $t_1 > t_0$, т. е. когда $C_1(t_1)$ и $C_2(t_1)$ больше единицы, задачу можно свести к другому интегральному уравнению, которое дает хорошие результаты при больших t_1. Для получения такого интегрального уравнения систему парных интегральных уравнений (8) приведем к виду

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \lambda N(\lambda) \sin \lambda t \, d\lambda = -\frac{1}{G} f(t) e^{-{}^3\!/_2 t} \qquad (0 < t < t_1), \\ &\int_0^\infty A(\lambda)[1 - N(\lambda)] \sin \lambda t \, d\lambda = (\gamma - \varkappa) e^{-{}^3\!/_2 t} \qquad (t_1 < t < \infty), \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$N(\lambda) = 1 + \frac{\lambda P'_{-1/2+\lambda i}(0)}{P'_{-1/2+\lambda i}(0)} = 1 - \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \frac{9}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4} + \frac{\lambda i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4} - \frac{\lambda i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4} + \frac{\lambda i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4} - \frac{\lambda i}{2}\right)} \approx$$

$$\approx \begin{cases} 1 - c\lambda & \text{при} \quad \lambda \to 0 \\ \dfrac{3}{8\lambda^2} + 0\left(\dfrac{1}{\lambda^4}\right) & \text{при} \quad \lambda \to \infty. \end{cases}$$

Если искать решение парных интегральных уравнений (18) в виде

$$\frac{\pi}{2} A_1(\xi) = -\frac{1}{G} \int_0^{t_1} J_1(\xi y)\, dy \int_0^y \frac{u f(u) e^{-{}^3\!/_2 u}}{\sqrt{y^2 - u^2}} du - \int_{t_1}^\infty y J_1(\xi y)\, G(y)\, dy,$$

то для определения $G(y)$ получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$G(x) = \int_{t_1}^\infty K_1(x, y)\, G(y)\, dy + P_1(x) \qquad (t_1 < x < \infty), \tag{19}$$

где

$$K_1(x, y) = y \int_0^\infty \lambda N(\lambda) J_1(\lambda x) J_1(\lambda y)\, d\lambda, \tag{20}$$

$$P_1(x) = -\int_0^{t_1} F_1(y) K(x, y)\, dy - \frac{3}{2}(\gamma - \varkappa) K_1\left(\frac{3}{2} x\right),$$

$$F_1(y) = -\frac{1}{G} \int_0^y \frac{u f(u) e^{-{}^3\!/_2 u}}{\sqrt{y^2 - u^2}} du,$$

$K_1(z)$ — функция Макдональда.

Аналогичным образом можно показать, что интегральное уравнение (19) при больших значениях t_1 можно решать методом последовательных приближений.

При $t_1 = 0$ интегральное уравнение (19) неразрешимо. Но зато из (12) получаем замкнутое решение задачи. При $t_1 = \infty$, наоборот, неразрешимо интегральное уравнение (12), но зато из (19) получается замкнутое решение задачи.

Итак, при малых значениях t_1 удобно пользоваться интегральным уравнением (12), а при больших значениях t_1 — интегральным уравнением (19).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 III 1966

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ն. Օ. ԳՈՒԼՔԱՆՅԱՆ

ԿԻՍԱԳՆԴԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է կիսագնդի ոլորման խնդիրը, երբ կիսագնդի սֆերիկ մակերևույթը ամրացված է անշարժ, իսկ կիսագունդը դեֆորմացիայի է ենթարկվում նրա հարթ մակերևույթի կենտրոնում ամրացված կոշտ կլոր շտամպի պտտման հետևանքով։ Խնդրի լուծումը ներկայացվում է Ֆուրյեի ինտեգրալի և Լեժանդրի բազմանդամներով շարքի գումարի տեսքով։ Շարքի գործակիցները որոշվում են վերջավոր տեսքով, իսկ անհայտ ֆունկցիայի որոշումը բերվում է զույգ ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը։ Վերջինը բերված է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարմանը և ցույց է տրված, որ այդ հավասարումը հաջողությամբ կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորության եղանակով։

A. A. BABLOYAN, N. O. GULKANIAN

TORSION OF SEMISPHERE

Summary

In this article the problem of torsion of a semisphere is considered, which revolts by means of a turning rigid stamp, when on the spherical part of the surface displacements are given.

The problem is reduced to the solution of dual integral equations, which are reduced in their turn to determining some function from the Fredholm's equation of the second type.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* О кручении тела вращения осесимметричной нагрузкой. ПММ, т. 24, 1960, 1048—1056.
2. *Абрамян Б. Л., Гулканян Н. О.* Кручение полой двухслойной полусферы. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 14, № 1, 1961.
3. *Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* Об одной контактной задаче, связанной с кручением полого полушара. ПММ, т. 26, 1962.
4. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
5. *Noble B.* Certain dual integral equation. Journ. of Mathematics and Physics, vol. 37, No. 2, 1958, 128—136.
6. *Tranter C. J.* A further note on dual integral equations and an application to the diffraction of electromagnetic waves. The quarterly journal of mechanics and applied mathematics, Oxford, Vol. VII, 1954, 317.
7. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.