

А. М. СИМОНЯН

О ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ОРТОТРОПНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

В настоящей работе рассмотрено равновесие двух сжимающихся ортотропных тел при плоской деформации в условиях линейной наследственности [1].

В случае упругого сопротивления материала задача эта была рассмотрена в работах [2] и [3].

Решение плоской контактной задачи для изотропных тел в условиях линейной наследственности дано в работе И. С. Прокоповича [4], а в условиях пластической наследственности — в работе Н. Х. Арутюняна [5].

§ 1. Об основных реологических зависимостях

Соотношения между деформациями и напряжениями ортотропного тела в условиях линейной наследственности, аналогично [6], запишем в виде

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{\partial S(t)}{\partial \tau_{ij}} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial S(\tau)}{\partial \tau_{ij}} K(t, \tau) d\tau + \varepsilon_{ij}^0(t), \quad (1.1)$$

$$S(t) = \frac{1}{2E_x} \sigma_x^2(t) + \frac{1}{2E_y} \sigma_y^2(t) + \frac{1}{2E_z} \sigma_z^2(t) - \frac{\nu_{xy}}{E_x} \tau_x \sigma_y - \\ - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_y \sigma_z - \frac{\nu_{xz}}{E_z} \tau_x \sigma_z + \frac{1}{2G_{xy}} \tau_{xy}^2 + \frac{1}{2G_{yz}} \tau_{yz}^2 + \frac{1}{2G_{zx}} \tau_{zx}^2. \quad (1.2)$$

Здесь $K(t, \tau)$ — ядро ползучести, E_i и G_{ij} — модуль упругости и модуль сдвига, ν_{ij} — коэффициент поперечной деформации в направлении j при действии σ_i , τ_1 — возраст материала, ε_{ij}^0 — вынужденные деформации.

Из условия существования потенциала $S(t)$ имеем $\nu_{ij} E_j = \nu_{ji} E_i$.

Сравним решения задач теории ползучести и теории упругости ортотропного материала. Подставляя выражения для деформаций из (1.1) в условия неразрывности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (x, y, z), \quad (1.3)$$

с учетом (1.2) получим

$$\begin{aligned}
 (1 - K^*) \Phi_x(T_x) \equiv & (1 - K^*) \left[\frac{1}{E_x} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x(t)}{\partial y^2} - \nu_{xy} \frac{\partial^2 \varepsilon_x(t)}{\partial x^2} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{E_y} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y(t)}{\partial x^2} - \nu_{yx} \frac{\partial^2 \varepsilon_y(t)}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{E_z} \left(\nu_{zx} \frac{\partial^2 \varepsilon_z(t)}{\partial y^2} + \nu_{zy} \frac{\partial^2 \varepsilon_z(t)}{\partial x^2} \right) - \\
 & \left. - \frac{1}{G_{xy}} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}(t)}{\partial x \partial y} \right] = - \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0(t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}^0(t)}{\partial x \partial y} \right) \quad (x, y, z), \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

где

$$K^* v(t) \equiv \int_{-1}^1 v(\tau) K(t, \tau) d\tau. \quad (1.5)$$

В случае линейной зависимости вынужденных деформаций от координат уравнения (1.4) являются однородными, которые, как известно, не имеют нетривиальных решений, а потому получим

$$\Phi_x(T_x) = 0 \quad (x, y, z). \quad (1.6)$$

Легко видеть, что результат (1.6) будет получен и в случае отсутствия ползучести ($K(t, \tau) \equiv 0$).

Аналогично можно показать, что и другая группа уравнений совместности деформаций

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x(t)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[- \frac{\partial \gamma_{yz}(t)}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}(t)}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}(t)}{\partial z} \right] \quad (x, y, z) \quad (1.7)$$

также даст адекватные уравнения в напряжениях в случае как наличия ползучести, так и отсутствия ее.

Как известно, составляющие напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия, условиям совместности и краевым условиям. Учитывая, что при задании краевых условий в напряжениях все эти требования в условиях ползучести и в условиях упругости совпадают, вследствие единственности решения задачи приходим к утверждению 1, дополняющему для ортотропных материалов известную теорему Н. Х. Арутюяна ([1], стр. 23).

1. При отсутствии вынужденных деформаций (или при их линейной зависимости от координат) и при задании краевых условий в напряжениях напряженное состояние ортотропных тел не зависит от факта ползучести.

Теперь обратимся к случаю задания краевых условий в перемещениях. Решая систему (1.1) относительно напряжений, с учетом (1.2) получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_x(t) = & E_x (1 + H^*) [(1 - \nu_{yz} \nu_{zy}) [\varepsilon_x(t) - \varepsilon_x^0(t)] + \\
 & + (\nu_{yx} + \nu_{yz} \nu_{zx}) [\varepsilon_y(t) - \varepsilon_y^0(t)] + (\nu_{zx} + \nu_{zy} \nu_{yx}) [\varepsilon_z(t) - \varepsilon_z^0(t)]], \quad (x, y, z) \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

$$\tau_{xy}(t) = G_{xy}(1 + H^*)[\gamma_{xy}(t) - \gamma_{xy}^0(t)] \quad (x, y, z), \quad (1.9)$$

где $H(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$, а

$$\alpha = \frac{1}{1 - \nu_{zy}\nu_{yz} - \nu_{zx}\nu_{xz} - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx} - \nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}}. \quad (1.10)$$

Подставляя (1.8) и (1.9) в уравнения равновесия, получим

$$(1 + H^*)L(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0, \varepsilon_y - \varepsilon_y^0, \varepsilon_z - \varepsilon_z^0, \gamma_{xy} - \gamma_{xy}^0, \gamma_{xz} - \gamma_{xz}^0) = -X, \quad (1.11)$$

$$(x, y, z)$$

где L — определенная линейная комбинация первых производных от указанных в скобках функций.

В случае отсутствия объемных сил получим

$$L(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0, \varepsilon_y - \varepsilon_y^0, \varepsilon_z - \varepsilon_z^0, \gamma_{xy} - \gamma_{xy}^0, \gamma_{xz} - \gamma_{xz}^0) = 0 \quad (x, y, z). \quad (1.12)$$

Поскольку все условия, налагаемые на перемещения, в условиях ползучести и в условиях упругости совпадают, вследствие единственности решения задачи приходим к утверждению 2.

2. При отсутствии объемных сил и при задании краевых условий в перемещениях, перемещения точек ортотропного тела не зависят от факта ползучести.

Рассмотрим теперь случай плоской деформации. Вместо уравнений неразрывности здесь будем иметь

$$\varepsilon_z = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (1.14)$$

В случае отсутствия вынужденных деформаций, после подстановки (1.1) и (1.2) в (1.13) и (1.14) убеждаемся, что эти уравнения, записанные в напряжениях, в условиях ползучести и в условиях упругости адекватны. Отсюда получим утверждение 3.

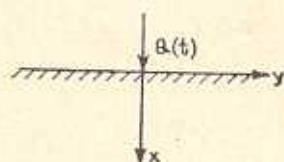
3. При отсутствии вынужденных деформаций, в условиях плоского деформационного состояния ($\varepsilon_z = 0$) при задании краевых условий (в направлениях x и y) в напряжениях, напряженное состояние тела не зависит от факта ползучести.

Утверждения 1—3 позволяют, при указанных в них условиях, непосредственно принимать те решения теории упругости, которые не претерпевают изменений от факта ползучести, и пользоваться лишь системой (1.1).

§ 2. Действие сосредоточенной силы на полуплоскость

Решая задачу о действии сосредоточенной силы $Q(t)$ на ортотропную полуплоскость при плоской деформации, аналогично [6], при обозначениях фиг. 1 получим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Q(t)(\xi_1 + \xi_2)}{\pi k} \frac{x^3}{(y^2 + \xi_1^2 x^2)(y^2 + \xi_2^2 x^2)}, \\ \sigma_y &= -\frac{Q(t)(\xi_1 + \xi_2)}{\pi k} \frac{xy^2}{(y^2 + \xi_1^2 x^2)(y^2 + \xi_2^2 x^2)}, \\ \sigma_z &= -\frac{Q(t)(\xi_1 + \xi_2)}{\pi k} \frac{x^2 y}{(y^2 + \xi_1^2 x^2)(y^2 + \xi_2^2 x^2)},\end{aligned}\quad (2.1)$$



Фиг. 1.

где

$$k = \sqrt{\frac{E_z - E_y \nu_{zy}^2}{E_z - E_x \nu_{zx}^2} \frac{E_x}{E_y}}, \quad (2.2)$$

а ξ_1 и ξ_2 — корни с положительной вещественной частью биквадратного уравнения (2.3)

$$\left(\frac{1}{E_y} - \frac{\nu_{zy}^2}{E_z}\right)\xi^4 - \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} - \frac{\nu_{zx}\nu_{zy}}{E_z}\right)\xi^2 + \frac{1}{E_x} - \frac{\nu_{zx}^2}{E_z} = 0. \quad (2.3)$$

Согласно утверждению 3 § 1, при отсутствии вынужденных деформаций действие силы $Q(t)$ на полуплоскость в случае наличия ползучести будет определяться теми же уравнениями (2.1).

Используя систему (1.1) и условие плоской деформации, определим перемещения соответственно в направлениях осей x и y

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{\pi k (\xi_2 - \xi_1)} \left\{ \frac{1 - \nu_{zx}\nu_{xz}}{E_x} \left[\frac{1}{\xi_2} \ln \sqrt{y^2 + \xi_2^2 x^2} - \frac{1}{\xi_1} \ln \sqrt{y^2 + \xi_1^2 x^2} \right] + \right. \\ &+ \frac{\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zx}}{E_y} \ln \sqrt{\frac{y^2 + \xi_2^2 x^2}{y^2 + \xi_1^2 x^2}} \left. \left[Q(t) - \int_{-1}^1 Q(\tau) K(t, \tau) d\tau \right] + C_1, \quad (2.4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v &= \frac{1}{\pi k (\xi_2 - \xi_1)} \left[\frac{\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}}{E_x} - \frac{\xi_1 \xi_2 (1 - \nu_{xy}\nu_{yz})}{E_y} \right] \left(\frac{1}{\xi_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{\xi_1 x} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\xi_2} \operatorname{arctg} \frac{y}{\xi_2 x} \right) \left[Q(t) - \int_{-1}^1 Q(\tau) K(t, \tau) d\tau \right] + C_2. \quad (2.5)\end{aligned}$$

§ 3. Решение контактной задачи

Рассмотрим два тела с гладкими поверхностями, прижимающиеся друг к другу силой $P(t)$ (фиг. 2).

Заменяя в (2.1) сосредоточенную силу $Q(t)$ элементом силы $p(y, t)dy$ и интегрируя (2.1) по области контакта $(-a(t), a(t))$, а затем, аналогично (2.4), определяя перемещения, на краю полуплоскости получим

$$u(t) = \lambda(1 - K^*) \int_{-a(t)}^{a(t)} p(s, t) \ln \frac{1}{|y - s|} ds + C(t), \quad (3.1)$$

где

$$\lambda = \frac{(1 - \gamma_{zx}\gamma_{yz})(\xi_1 + \xi_2)}{\pi k E_1 \xi_1^2 \xi_2^2}. \quad (3.2)$$

Как известно, в области контакта имеет место соотношение

$$u_1(t) + u_2(t) = \delta(t) - f_1(y) - f_2(y), \quad (3.3)$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — перемещения точек контакта соответственно двух тел, $\delta(t)$ — суммарное поступательное сближение, а $f_1(y)$ и $f_2(y)$ — уравнения поверхностей этих тел (фиг. 2).

Подставляя (3.1) с соответствующими индексами в (3.3), получим

$$(1 - A^*) \int_{-a(t)}^{a(t)} p(s, t) \ln \frac{1}{|y - s|} ds = \frac{\gamma_0(t) - f_1(y) - f_2(y)}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (3.4)$$

где $A^* = \frac{\lambda_1 K_1^* + \lambda_2 K_2^*}{\lambda_1 + \lambda_2}$, а $\gamma_0(t)$ произвольна.

Таким образом, задача сводится к определению $p(y, t)$ из нижеследующих двух взаимосвязанных интегральных уравнений

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} p(s, t) \ln \frac{1}{|y - s|} ds = \omega(y, t), \quad (3.5)$$

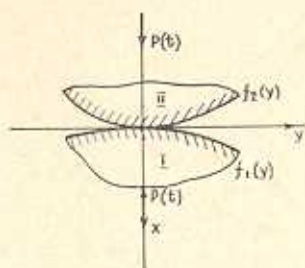
$$\begin{aligned} \omega(y, t) - \int_{\tau_1}^t \omega(y, \tau) \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} K_1(t, \tau) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} K_2(t, \tau) \right] d\tau = \\ = \frac{\gamma_0(t) - f_1(y) - f_2(y)}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отметим, что, хотя при решении задачи о напряженном состоянии полуплоскости учет анизотропии приводит к существенным сложностям, в контактной задаче учет этот приводит лишь к наличию коэффициентов λ .

Аналогично [4], решение (3.6) представим в виде

$$\omega(y, t) = \chi^*(t) - \frac{f_1(y) + f_2(y)}{\lambda_1 + \lambda_2} \mu(t), \quad (3.7)$$

где $\mu(t)$ — решение уравнения



Фиг. 2.

$$\mu(t) - \int_{\tau_1}^t \mu(\tau) \left[\frac{\gamma_1}{\lambda_1 + \lambda_2} K_1(t, \tau) + \frac{\gamma_2}{\lambda_1 + \lambda_2} K_2(t, \tau) \right] d\tau = 1. \quad (3.8)$$

Решение (3.8), вообще говоря, всегда может быть найдено методом итераций. Если принять

$$K_i(t, \tau) = \frac{\partial C_i(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad C_1(t, \tau) = \psi_1(\tau)[1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}], \\ C_2(t, \tau) = \psi_2(\tau)[1 - e^{-\gamma_2(t-\tau)}], \quad (3.9)$$

то в некоторых случаях решение (3.8) можно получить в замкнутом виде. Для случая $\gamma_1 = \gamma_2$ такое решение дано в работе [4]. Здесь рассмотрим случай отсутствия старения материалов ($\psi(\tau) = \text{const}$) при $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Обозначим

$$\frac{\gamma_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \psi_1 = a_1, \quad \frac{\gamma_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \psi_2 = a_2. \quad (3.10)$$

Дифференцируя (3.8) по t , получим

$$\mu'(t) - \mu(t)(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2) + \int_{\tau_1}^t \mu(\tau) [a_1 \gamma_1^2 e^{-\gamma_1(t-\tau)} + a_2 \gamma_2^2 e^{-\gamma_2(t-\tau)}] d\tau = 0. \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.11) значение интеграла из (3.8), получим

$$\mu'(t) - \mu(t)(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 - \gamma_1) + a_2 \gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1) \int_{\tau_1}^t \mu(\tau) e^{-\gamma_1(t-\tau)} d\tau = \gamma_1. \quad (3.12)$$

Дифференцируя (3.12) и исключая интеграл из полученного выражения и из (3.12), получим уравнение

$$\mu''(t) + [\gamma_1(1 - a_1) + \gamma_2(1 - a_2)]\mu'(t) + \gamma_1 \gamma_2 (1 - a_1 - a_2)\mu(t) = \gamma_1 \gamma_2 \quad (3.13)$$

при краевых условиях

$$\mu(\tau_1) = \gamma_1 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial \mu(t)}{\partial t} \right|_{t=\tau_1} = \gamma_1 (1 + a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 - \gamma_1). \quad (3.14)$$

Нетрудно видеть, что корни k_1 и k_2 характеристического для (3.14) уравнения будут вещественные и различные, так как a_1 , a_2 , γ_1 и γ_2 положительны и, следовательно,

$$\left[\frac{\gamma_1(1 - a_1) - \gamma_2(1 - a_2)}{2} \right]^2 + \gamma_1 \gamma_2 a_1 a_2 > 0.$$

В таком случае решением (3.8) будет

$$p(t) = \frac{e^{k_1(t-\tau_1)}}{k_2 - k_1} \left[\gamma_1 (k_2 - 1 - a_1 \tilde{\gamma}_1 - a_2 \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\gamma}_1) - \frac{k_2}{1 - a_1 - a_2} \right] + \\ + \frac{e^{k_2(t-\tau_2)}}{k_2 - k_1} \left[\gamma_1 (1 - k_1 + a_1 \tilde{\gamma}_1 + a_2 \tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_1) + \frac{k_1}{1 - a_1 - a_2} \right] + \frac{1}{1 - a_1 - a_2}. \quad (3.15)$$

Применяя метод М. Г. Крейна [7], а также результаты [8], решение уравнения (3.5) запишем в виде

$$p(y, t) = a(t) \left(\ln \frac{2}{a(t)} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial a} \int_{-a(t)}^{a(t)} g(s, a) \omega(s, t) ds \right] g(y, a) - \\ - \int_y^{a(t)} g(y, u) \frac{\partial}{\partial u} \left[u \left(\ln \frac{2}{u} \right)^2 \frac{\partial}{\partial u} \int_{-a}^u g(s, u) \omega(s, t) ds \right] du - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \int_y^{a(t)} u \left(\ln \frac{2}{u} \right)^2 g(y, u) \left[\int_{-a}^u g(s, u) \omega_s(s, t) ds \right] du, \quad (3.16)$$

где

$$g(s, a) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2(t) - s^2}} \frac{1}{\ln \frac{2}{a(t)}} \quad (3.17)$$

Решением симметричной задачи о контакте двух тел будет

$$p(y, t) = \frac{\chi(t)}{\sqrt{a^2(t) - y^2}} + \frac{2p(t)}{\pi(\lambda_1 + \lambda_2)} \int_y^{a(t)} \frac{u}{\sqrt{u^2 - y^2}} \int_0^u \frac{f_1(s) + f_2(s)}{\sqrt{u^2 - s^2}} ds du. \quad (3.18)$$

Подставляя (3.18) в интегральное уравнение равновесия

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} p(y, t) dy = P(t), \quad (3.19)$$

где $P(t)$ — сжимающая сила, получим

$$P(t) = \pi \chi(t) + \frac{2p(t)}{\pi(\lambda_1 + \lambda_2)} \int_0^{a(t)} \sqrt{a^2(t) - s^2} [f_1(s) + f_2(s)] ds. \quad (3.20)$$

При заданной ширине контакта функция $\chi(t)$ определится из (3.20). При гладком контуре сжимаемых тел из условия конечности давления в области контакта будем иметь $\chi(t) = 0$, а для определения $a(t)$ будем иметь уравнение

$$\int_0^{a(t)} \sqrt{a^2(t) - s^2} [f_1(s) + f_2(s)] ds = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \pi}{2^{1/2}} P(t). \quad (3.21)$$

Вообще говоря, функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ могут оказаться такими, что интеграл (3.21) не решается. Воспользуемся методом последовательных уточнений [9].

Уравнение (3.21) запишем в виде

$$\int_0^{a(t)} \sqrt{a^2(t) - s^2} \varphi(s) ds = f_0(t). \quad (3.22)$$

Примем оператор

$$B(f) = \int_0^{\gamma(f)} \sqrt{\gamma^2(f) - s^2} \varphi(s) ds. \quad (3.23)$$

Рассмотрим последовательность, удовлетворяющую рекуррентному равенству

$$f_{n,k+1} = f_0 + f_{n,k} - B(f_{n,k}), \quad f_{n,0} \equiv f_0. \quad (3.24)$$

Если подобрать такую функцию $\gamma(f)$, что почти всюду

$$0 < B'(f) < 2, \quad (3.25)$$

то

$$a(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(f_{n,n}). \quad (3.26)$$

Доказательство этого утверждения аналогично приведенному в [9]. Отметим, что чем ближе $B'(f)$ к единице, тем лучше сходимость (3.24).

Обратимся теперь к случаю заданных границ контакта. Опуская соответствующие выкладки, запишем формулу для определения давления в области контакта при действии внецентричной сжимающей силы $P(t)$

$$\begin{aligned} p(y, t) = & -\frac{P(t)}{\pi \sqrt{a^2 - y^2}} \left(1 + \frac{2\gamma(t)y}{a^2} \right) + \frac{2^{1/2}(t)}{\pi^2 (\lambda_1 + \lambda_2)} \times \\ & \times \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - y^2}} \int_0^a \sqrt{a^2 - s^2} [f_1(s) + f_2(s)] ds - \right. \\ & \left. - \int_y^a \frac{u}{\sqrt{u^2 - y^2}} \left[\int_0^u \frac{f_1(s) + f_2(s)}{\sqrt{u^2 - s^2}} ds \right] du \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Из (3.27) легко усмотреть, что в случае плоских до деформирования поверхностей контакта распределение давления в области контакта совпадает с решением для изотропного уругого тела. При этом

$$p(y, t) = \frac{P(t)}{\pi^2 \sqrt{a^2 - y^2}} \left(1 - \frac{2\gamma(t)y}{a^2} \right). \quad (3.28)$$

§ 4. Пример выбора функции $\eta(f)$

Пусть поверхности сжимаемых тел определяются функциями

$$f_1(y) = 0, \quad f_2(y) = \left(1 - \cos \frac{y}{R}\right) r. \quad (4.1)$$

Формула (3.22) здесь запишется так

$$\int_0^{a(t)} \sqrt{a^2(t) - s^2} \cos \frac{s}{R} ds = \frac{\pi(\lambda_1 + \lambda_2)}{2r\mu(t)} R^2 P(t). \quad (4.2)$$

Функция $\eta(f)$, согласно (3.25), должна удовлетворять неравенству

$$0 < \frac{1}{2} \int_0^{\eta(f)} \frac{[\eta^2(f)]'}{\sqrt{\eta^2(f) - s^2}} \cos \frac{s}{R} ds < 2. \quad (4.3)$$

Ограничимся рассмотрением положительных f (функция f_0 по обозначениям (3.22) принимает только положительные значения). Примем

$$\eta(f) = \beta \sqrt{f}, \quad \beta > 0. \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.3), получим

$$0 < \frac{1}{2} \int_0^{\beta\sqrt{f}} \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2 f - s^2}} \cos \frac{s}{R} ds < 2. \quad (4.5)$$

Учитывая, что ширина контакта мала по сравнению с размерами тел, во всяком случае, имеем

$$\frac{\beta\sqrt{f}}{R} < \frac{\pi}{2},$$

но тогда левое неравенство (4.5) удовлетворяется при любом $\beta > 0$. Правое неравенство заменим более жестким

$$\frac{\beta^2}{2} \int_0^{\beta\sqrt{f}} \frac{ds}{\sqrt{\beta^2 f - s^2}} < 2, \quad (4.6)$$

откуда получим

$$\frac{\pi\beta^2}{4} < 2. \quad (4.7)$$

Учитывая, что сходимость будет наилучшей, когда левая часть (4.7) близка к единице, примем

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad \text{и} \quad \eta(f) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{f}. \quad (4.8)$$

Теперь задача свелась к определению f_0 , являющейся пределом последовательности (3.24), которая для этого примера запишется в виде

$$f_{u_{n+1}} = \frac{\pi(l_1 + l_2) R^2}{2r^2(t)} P(t) + f_{u_n} - \int_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{f_{u_n}}} \sqrt{\frac{4}{\pi} f_{u_n} - s^2} \cos \frac{s}{R} ds, \quad (4.9)$$

а уравнение (3.26) приняло вид

$$a(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{f_{u_n}}. \quad (4.10)$$

Интеграл же в (4.9) всегда можно решить численными методами.

Проиллюстрируем это на числовом примере.

Пусть полупространство из бетона с характеристиками

$$E_s = 180000 \text{ кг/см}^2; \quad E_y = E_z = 140000 \text{ кг/см}^2; \quad \nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = 0,2;$$

$$G = 70000 \text{ кг/см}^2; \quad \gamma_i(t, \tau) = 0,504(1 - e^{-0,03(t-\tau)})$$

подвергается сжатию жестким телом с $r = 1 \text{ см}$ и $R = 20 \text{ см}$ силой

$$P(t) = \frac{1000 \text{ кг}}{\pi} \approx 318,31 \text{ кг}.$$

Пользуясь (2.2), (2.3) и (3.2), приходим к

$$\int_0^{a(t)} \sqrt{a^2(t) - s^2} \cos \frac{s}{20} ds = \frac{0,77}{\mu(t)} \text{ см}^2,$$

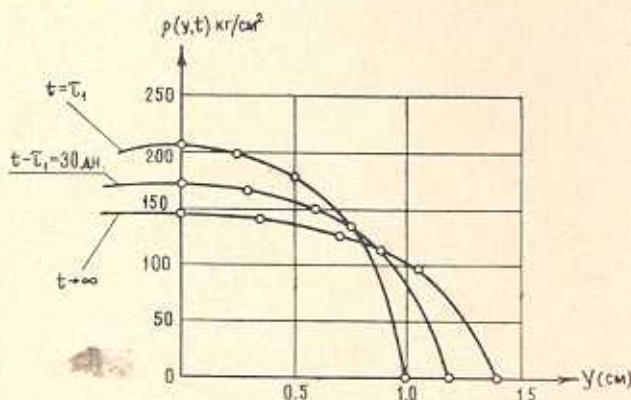
где $\mu(t)$ определяется из (3.8).

Из таблицы 1, где $a(t)$ взято из второго приближения, можно судить об эффективности примененного метода.

Таблица 1

$t - \tau_1$ (дни)	μ	$a(t)$ (см)	$\frac{B(f_0) - f_0 \cdot 100^{0/10}}{f_0}$	$\frac{B(f_{u_0}) - f_0 \cdot 100^{0/10}}{f_0}$
0	1	0,99024	+0,2675	-0,01428
30	0,705	1,17916	+0,2692	-0,0403
∞	0,503	1,39668	+0,2123	-0,02352

В табл. 2 и на фиг. 3 показано давление в области контакта.



Фиг. 3.

Таблица 2
Значения $p(y, t)$ в кг/см^2

$t - \tau_1$	$y/a(t)$				
	0	0,25	0,5	0,75	1,0
0	204,78	198,28	177,34	135,45	0
30 дней	171,92	166,46	148,88	113,71	0
∞	145,25	140,64	125,79	96,07	0

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 I 1965

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆԻԱՆ

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԻՐԱՐԻՄԱՆԵՐԻ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԳԻՐԸ
ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գծային ժառանգականության առնչությունների շրջանակներում դիտարկվում է երկու օրթոտրոպ մարմինների հարթ կոնտակտային խնդիրը:

Կոնտակտի տիրույթում ճնշման որոշման համար օգտագործվում է Կրեյնի մեթոդը:

Տիրույթի սահմանների որոշման համար ստացված է հավասարում, որը լուծվում է հաջորդական ճշտումների մեթոդով: Բերվում է թվային օրինակ:

A. M. SIMONIAN

THE PLANE CONTACT PROBLEM OF ORTHOTROPIC
SOLID WITH THE CALCULATION OF CREEP

S u m m a r y

In this paper the equilibrium of two squeezed orthotropic solids in the condition of linear heredity in plane deformation is examined. (The case of one region of contact).

Some theorems are proved which sometimes bring the problem of creep to the problem of theory of elasticity.

For the solution of Fredholm integral equation of the first kind the method of M. G. Krain is used.

The method of successive correction which is offered by the author is used to determine the border of contact.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М.—Л., 1952.
2. *Савин Г. Н., Грилицкий Д. В.* Давление двух упругих анизотропных тел. Докладі АН УРСР, № 2, 1952.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. Гостехтеориздат, М., 1953.
4. *Прокопович И. Е.* О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. 20, вып. 6, 1956.
5. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехтеориздат, М.—Л., 1957.
7. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, т. 100, № 3, 1955.
8. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, т. 94, № 6, 1954.
9. *Симонян А. М.* Температурная задача цилиндрических труб в условиях пластической наследственности. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 4, 1965.