

А. М. СИМОНЯН

НЕКОТОРЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

В настоящей работе рассматриваются нижеследующие задачи.

1. Толстостенный сферический сосуд под действием теплового потока и давлений на полости.
2. Точечный источник тепла в бесконечном массиве.
3. Сферический сосуд с несжимаемой жидкостью.
4. Тонкостенный сферический сосуд.

Решение вышеуказанных задач дано для сред, подчиняющихся законам нелинейной наследственности [1].

В настоящей работе используется метод решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода, предложенный в работе [2].

Получить равномерно нагретого сферического сосуда под действием давлений на полости исследована в работе [3].

Случаи сферической полости в неограниченной среде при действии центрально-симметричного теплового потока для вязко-упругих сред Максвелла и Кельвина, а также при действии точечного (мгновенного и периодического) источника тепла на упругую среду рассмотрены в монографии [4].

В работе [5] рассмотрена температурная задача сферического сосуда в условиях пластической наследственности.

§ 1. О методе решения нелинейного интегрального уравнения

Рассмотрим уравнение

$$u(t) - \alpha \int_0^t K(t, \tau) u(\tau) d\tau - \beta \int_0^t K(t, \tau) f[u(\tau)] d\tau = g(t), \quad (1.1)$$

где α — числовой параметр, а β — параметр, имеющий размерность $\left(\frac{u}{f(u)}\right)^{-1}$.

В работе [2] приведен метод решения таких уравнений. При этом для сходимости решения требовалось, чтобы

$$|\beta| < \frac{c}{T^2}, \quad (1.2)$$

то есть для каждого β метод оказывался применимым лишь в некотором ограниченном промежутке времени.

Здесь, используя некоторые специфические свойства ядра релаксации, мы получим требование к β без каких-либо ограничений во времени. Основные приемы в нижеследующем выводе остаются теми же, что и в [2].

Решая линейную часть (1.1), получим

$$u(t) = h(t) + \beta \int_0^t H(t, \tau) f[u(\tau)] d\tau, \quad (1.3)$$

где

$$h(t) = g(t) + \alpha \int_0^t H(t, \tau) g(\tau) d\tau,$$

а $H(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$.

Решение (1.3) ищем в виде

$$u(t) = u_0(t) + \beta u_1(t) + \beta^2 u_2(t) + \dots + \beta^n u_n(t) + \dots \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.3) и приравнивая выражения при равных степенях β , можно получить

$$u_{n-1}(t) = \sum_n \frac{1}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_n!} \int_0^t H(t, \tau) [u_1(\tau)]^{i_1} \cdot [u_2(\tau)]^{i_2} \cdot \dots \cdot [u_n(\tau)]^{i_n} f^{(i_1+i_2+\dots+i_n)}(h(\tau)) d\tau \quad (n = i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n). \quad (1.5)$$

Поставим практически вполне выполнимое требование

$$|f^{(p)}(u)| < K_0 p! a^p, \quad (1.6)$$

где K_0 и a — некоторые положительные постоянные.

Подставляя (1.6) в (1.5), получим

$$u_{n-1}(t) \leq \sum_n \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_n!} K_0 \cdot a^{i_1+i_2+\dots+i_n} \int_0^t H(t, \tau) |u_1(\tau)|^{i_1} \times \\ \times |u_2(\tau)|^{i_2} \cdot \dots \cdot |u_n(\tau)|^{i_n} d\tau. \quad (1.7)$$

Из физических соображений можно принять

$$\left| \int_0^t H(t, \tau) d\tau \right| < H_T. \quad (1.8)$$

Условие (1.8) аналогично утверждению, что при задании телу произвольной деформации, не изменяющейся во времени, напряжения от релаксации не могут изменяться по величине неограниченно.

Рассмотрим значения числовой последовательности B_n , удовлетворяющей неравенству (1.9)

$$|u_n(t)| \leq \frac{B_n}{a} R_0^n, \quad (1.9)$$

где

$$R_0 = aK_0H_T. \quad (1.10)$$

Полагая в (1.5) $n=0$, получим

$$u_1(t) = \int_0^t H(t, \tau) f[h(\tau)] d\tau \leq K_0 H_T,$$

т. е. $B_1 = 1$.

Подставим оценку (1.9) в (1.7)

$$u_{n+1}(t) \leq K_0 \sum_n \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_n!} R_0^n \cdot B_1^{i_1} \cdot B_2^{i_2} \cdot \dots \cdot B_n^{i_n} \cdot H_T. \quad (1.11)$$

Отсюда видно, что можно принять рекуррентную зависимость

$$B_{n+1} = \sum_n \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_n!} B_1^{i_1} \cdot B_2^{i_2} \cdot \dots \cdot B_n^{i_n}. \quad (1.12)$$

Рассмотрим, каким требованиям должны удовлетворять A и α_0 , чтобы выполнялось неравенство

$$B_n < A \alpha_0^n. \quad (1.13)$$

Подставляя (1.12) в (1.12), получим

$$B_{n+1} < \sum_n \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_n!} A^{i_1 + i_2 + \dots + i_n} \alpha_0^n = \alpha_0^n \sum_{l=0}^n \sum_n \frac{l! \cdot A^l}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_n!}. \quad (1.14)$$

Здесь принято

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = l, \quad (1.15)$$

$$i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n = n. \quad (1.16)$$

Неравенство (1.14) будет тем более удовлетворяться, если отбросить (1.16) и сумму распространить на все целые неотрицательные решения (1.15), а результат разделить на число всевозможных перестановок из l элементов (см. [2]).

Отсюда получим

$$B_{n+1} < \alpha_0^n \sum_{l=0}^n \frac{A^l}{n!} \sum_i \frac{l!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_n!} = \frac{\alpha_0^n}{n!} \sum_{l=0}^n (nA)^l = \frac{(nA)^{n+1} - 1}{(nA - 1) \cdot n!} \alpha_0^n. \quad (1.17)$$

Сравнивая условия (1.17) и (1.13), приходим к неравенству

$$\frac{(nA)^{n+1} - 1}{nA - 1} \cdot \frac{1}{\alpha_0 n!} < A. \quad (1.18)$$

При $A = \frac{1}{e}$, $\alpha_0 = e$ неравенство (1.18) будет удовлетворено для любых целых $n \geq 3$, то есть

$$\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{n}{e} - 1\right) \cdot n!} \leq 1. \quad (1.19)$$

Действительно, используя известное неравенство

$$n! > \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad (1.20)$$

будем иметь для $n > 4$

$$\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1} - 1}{\frac{n}{e} - 1} \cdot \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n} n^n} < \frac{n}{(n-e)\sqrt{2\pi n}} < 1.$$

(Для $n \leq 3$ неравенство (1.19) проверяется непосредственно).

Итак, B_n , определяющееся из формулы

$$B_n \leq e^{n-1}, \quad (1.21)$$

удовлетворяет неравенству (1.9), то есть

$$|u_n(t)| \leq \frac{e^{n-1}}{a} R_0^n, \quad n = 3, 4, \dots \quad (1.22)$$

В таком случае ряд (1.4) мажорируется числовым рядом

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{ae} \cdot (eR_0^n)^n.$$

Отсюда видно, что сходимость ряда (1.4) гарантируется во всяком случае для

$$|z| < \frac{1}{eR_0}. \quad (1.23)$$

Отметим, что оценка (1.23), как и в [2], вообще говоря, имеет большой запас.

Рассмотрим численный пример.

Для старого базальтового бетона имеются следующие экспериментальные данные:

$$f(u) = u^m, \quad \beta = 5 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}\right)^{-3}, \quad z = 0,999995,$$

$$\left| \int_0^1 H(t, z) dt \right| < H_T = 0,136, \quad m = 4.$$

Следует подобрать a и K_0 , удовлетворяющие (1.6). Легко видеть, что при $p > m = 4$ условие (1.6) удовлетворяется для любых $a > 0$ и $K_0 > 0$, поэтому рассмотрим лишь случай $p < m$:

$$f^{(p)}(u) = m(m-1)\cdots(m-p+1) \cdot u^{m-p} = \frac{m!}{(m-p)!} \cdot \frac{u^m}{u^p} \leq K_0 p! a^p.$$

Для $m=4$ легко видеть, что последнее неравенство будет удовлетворено при

$$K_0 = 6u^4 \quad \text{и} \quad a = \frac{1}{u}.$$

Подставляя это в (1.10) и (1.23), получим, что при

$$\beta = 5 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\kappa l}{\text{см}^2} \right)^{-3}$$

метод будет применим во всяком случае для

$$u \leq \sqrt[3]{\frac{1}{6e \cdot 0,136 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\kappa l}{\text{см}^2} \right)^{-3}}} = 45 \text{ кл/см}^2.$$

§ 2. Постановка задачи и получение общих зависимостей

Рассмотрим толстостенный сосуд, ограниченный двумя концентрическими сферическими полостями радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), находящийся под действием теплового потока $T(r, t)$.

Легко видеть, что при соответствующей конкретизации краевых условий, размеров R_1 и R_2 и функции $T(r, t)$ можно прийти к любой из вышеуказанных задач.

Вследствие центральной симметрии девиаторы деформаций и напряжений имеют одинаковые главные направления в любой момент времени t , а потому зависимость между деформациями и напряжениями определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) &= \frac{1}{2G(t)} \left[z_r(t) - \frac{3\nu}{1+\nu} z(t) \right] - \int_0^t \left[z_r(\tau) - \frac{3\nu}{1+\nu} z(\tau) \right] \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{2G(\tau)} \right] d\tau - \frac{3}{2} \int_0^t [z_r(\tau) - z(\tau)] \cdot F[z_r(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = z_0 \Delta T(r, t) \\ &\quad (r, \varphi, \theta). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$z_i(t) = \frac{1}{3} [z_r(t) + z_\varphi(t) + z_\theta(t)], \quad (2.2)$$

$$z_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(z_r - z_\varphi)^2 + (z_\varphi - z_\theta)^2 + (z_\theta - z_r)^2 + 6(z_{r\varphi}^2 + z_{\varphi\theta}^2 + z_{\theta r}^2)}, \quad (2.3)$$

$$\Delta T(r, t) = T(r, t) - T_0, \quad (2.4)$$

где T_0 — температура, соответствующая отсутствию деформаций и напряжений (в случае отсутствия закреплений T_0 произвольно), α_0 — коэффициент линейного расширения.

Принимая

$$f(z_i) = \alpha + \beta z_i^{m-1} \quad (2.5)$$

и пренебрегая изменением упругих постоянных во времени, из системы (2.1) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) - \varepsilon_z(t) = & \frac{1}{2G} [z_r(t) - z_z(t)] - \frac{3}{2} \int_0^t [z_r(\tau) - z_z(\tau)] \times \\ & \times [\alpha + \beta z_i^{m-1}] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Учитывая центральную симметрию, из (2.3) найдем

$$z_i = |z_r - z_z|. \quad (2.7)$$

Условие совместности деформаций и уравнение равновесия с учетом гипотезы Дюамеля в этом случае запишутся

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} + \frac{\varepsilon_z - z_r}{r} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial z_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (z_r - z_z) = 0. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.7), (2.8) и (2.9) в (2.6), получим

$$r \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} = -\frac{1}{4G} \varepsilon_z(r, t) - \frac{3}{4} \int_0^t [z_r(r, \tau) + \beta z_z^m(r, \tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2.10)$$

где положено

$$\varepsilon_z(r, t) = r \frac{\partial z_z(r, t)}{\partial r}. \quad (2.11)$$

Отметим, что формула (2.10) справедлива при условии

$$(-|z|)^m = -|z|^m \quad (2.12)$$

для любых m , в том числе и четных.

Из системы (2.1) получим условие реологической несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta = k(z_r + z_z + z_\theta) + 3\alpha_0 \Delta T(r, t). \quad (2.13)$$

Подставляя (2.8) и (2.13) и решая полученное уравнение относительно ε_z , получим

$$\varepsilon_z = \frac{A(t)}{r^2} + \frac{3\alpha_0}{r^2} \int r^2 \Delta T(r, t) dr + k z_r, \quad (2.14)$$

где $A(t)$ — функция, определяющаяся из краевых условий.

Уравнения (2.10) и (2.14) дают

$$\varphi(r, t) - \lambda \int_{\tau_0}^t [2\varphi(r, \tau) + \beta\varphi^m(r, \tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \Phi(A, r, t), \quad (2.15)$$

где

$$\lambda = \frac{E}{4(1-\nu)}, \quad (2.16)$$

$$\Phi(A, r, t) = \frac{E}{r^3(1-\nu)} \left[A(t) - x_0 \int_0^r r^2 \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right]. \quad (2.17)$$

Аналогично (1.4), решение (2.15) ищем в виде

$$\varphi(r, t) = \varphi_0(r, t) + \beta\varphi_1(r, t) + \beta^2\varphi_2(r, t) + \dots \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (2.15) и приравнивая члены при одинаковых степенях β , получим систему линейных уравнений:

$$\varphi_0(r, t) - \lambda x \int_{\tau_0}^t \varphi_0(r, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \Phi(A, r, t), \quad (2.19)$$

$$\varphi_1(r, t) - \lambda x \int_{\tau_0}^t \varphi_1(r, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \lambda \int_{\tau_0}^t [\varphi_0(r, \tau)]^m \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(r, t) - \lambda x \int_{\tau_0}^t \varphi_2(r, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \lambda m \int_{\tau_0}^t [\varphi_0(r, \tau)]^{m-1} \times \\ \times [\varphi_1(r, \tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Пользуясь обозначением

$$R^*v(t) = \int_{\tau_0}^t v(\tau) R(t, \tau) d\tau, \quad (2.22)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $\lambda x \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}$, решения (2.19) и (2.20)

запишем в виде

$$\varphi_0(r, t) = (1 + R^*)\Phi(A, r, t), \quad (2.23)$$

$$\varphi_1(r, t) = \lambda (1 + R^*) \int_{\tau_0}^t [\varphi_0(r, \tau)]^m \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.24)$$

Ограничиваясь в (2.18) двумя членами и используя тождество

$$\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} + \int_{\tau_0}^t R(t, \xi) \frac{\partial C(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi = \frac{1}{\lambda x} R(t, \tau), \quad (2.25)$$

для решения (2.15) получим выражение

$$\varepsilon(r, t) = (1 + R^*) \Phi(A, r, t) + \frac{\beta}{2} R^* [(1 + R^*) \Phi(A, r, t)]^m. \quad (2.26)$$

Запишем выражения для напряжений и перемещений через произвольные функции $A(t)$ и $B(t)$

$$\begin{aligned} z_r(r, t) = B(t) + \int^r \frac{1}{r} \left\{ (1 + R^*) \Phi(A, r, t) + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2} R^* [(1 + R^*) \Phi(A, r, t)]^m \right\} dr, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} z_z(r, t) = z_r(r, t) + \frac{1}{2} \left\{ (1 + R^*) \Phi(A, r, t) + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2} R^* [(1 + R^*) \Phi(A, r, t)]^m \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$u(r, t) = kr z_r(r, t) - \frac{3(1-\nu)r}{E} \int^r \Phi(A, r, t) \frac{dr}{r}. \quad (2.29)$$

Ниже займемся определением функций $A(t)$ и $B(t)$, исходя из конкретных краевых условий.

§ 3. Толстостенный сферический сосуд под действием теплового потока и давлений на полости

Пусть на полостях радиусов R_1 и R_2 действуют давления соответственно $q_1(t)$ и $q_2(t)$. Тогда из (2.27) будем иметь

$$\int_{R_1}^{R_2} \left\{ (1 + R^*) \Phi(A, r, t) + \frac{\beta}{2} R^* [(1 + R^*) \Phi(A, r, t)]^m \right\} \frac{dr}{r} = q_2(t) - q_1(t). \quad (3.1)$$

Положим, что m — целое положительное число.

Подставляя (2.17) в (3.1), вследствие справедливости (2.12), получим

$$\begin{aligned} & \frac{R_2^3 - R_1^3}{3R_1^2 R_2^2} (1 + R^*) A(t) + \frac{\beta}{2} \left(\frac{E}{1-\nu} \right)^{m-1} \cdot \frac{R_2^{3m} - R_1^{3m}}{3m R_1^{2m} \cdot R_2^{2m}} \times \\ & \times R^* [(1 + R^*) A(t)]^m - \frac{m\beta}{2} \left(\frac{E}{1-\nu} \right)^{m-1} \times \\ & \times R^* \left\{ [(1 + R^*) A(t)]^{m-1} \int_{R_1}^{R_2} (1 + R^*) \varepsilon(r, t) \frac{dr}{r^{2m-1}} \right\} + \\ & + \frac{\beta}{2} \left(\frac{E}{1-\nu} \right)^{m-1} \frac{m(m-1)}{2!} \times \\ & \times R^* \left\{ [(1 + R^*) A(t)]^{m-2} \int_{R_1}^{R_2} [(1 + R^*) \varepsilon(r, t)]^2 \frac{dr}{r^{3m-1}} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + (-1)^{m-1} m \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{E}{1-\nu} \right)^{m-1} R^* \left\{ (1-R^*) A(t) \times \right. \\
& \times \int_{k_1}^{k_2} [(1+R^*) \chi(r, t)]^{m-1} \frac{dr}{r^{3m-1}} = \frac{1-\nu}{E} [q_2(t) - q_1(t)] + \\
& + \int_{k_1}^{k_2} (1+R^*) \chi(r, t) \frac{dr}{r^3} + (-1)^{m-1} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{E}{1-\nu} \right)^{m-1} \times \\
& \times R^* \int_{k_1}^{k_2} [(1+R^*) \chi(r, t)]^m \frac{dr}{r^{3m-1}}, \quad (3.2)
\end{aligned}$$

где положено

$$\chi(r, t) = z_0 \int r^2 \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr. \quad (3.3)$$

Решение (3.2) ищем в виде

$$A(t) = A_0(t) + \beta A_1(t) + \beta^2 A_2(t) + \dots \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.2), получим систему линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Если в (3.4) ограничиться двумя членами, то решением (3.2) будет

$$\begin{aligned}
A(t) = & A_0(t) + \frac{\beta}{2} \frac{3R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(\frac{E}{1-\nu} \right)^{m-1} \times \\
& \times \left\{ -\frac{R_2^{3m} - R_1^{3m}}{3m R_1^{3m} R_2^{3m}} K^* [(1+R^*) A_0(t)]^m + \right. \\
& + m K^* \left[[(1+R^*) A_0(t)]^{m-1} \int_{k_1}^{k_2} (1+R^*) \chi(r, t) \frac{dr}{r^{3m+1}} \right] - \\
& - \frac{m(m-1)}{2!} K^* \left[[(1+R^*) A_0(t)]^{m-2} \int_{k_1}^{k_2} [(1+R^*) \chi(r, t)]^2 \frac{dr}{r^{3m+1}} + \dots + \right. \\
& + (-1)^m \cdot m K^* \left[(1+R^*) A_0(t) \cdot \int_{k_1}^{k_2} [(1+R^*) \chi(r, t)]^{m-1} \frac{dr}{r^{3m+1}} \right] + \\
& \left. + (-1)^{m+1} K^* \int_{k_1}^{k_2} [(1+R^*) \chi(r, t)]^m \frac{dr}{r^{3m-1}} \right\}, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

где

$$A_0(t) = \frac{3R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left\{ \frac{1-\nu}{E} (1-K^*) [q_2(t) - q_1(t)] + \int_{k_1}^{k_2} \chi(r, t) \frac{dr}{r^3} \right\}. \quad (3.6)$$

$$K^*v(t) = \lambda_2 \int_{\tau_1}^t v(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.7)$$

При выводе (3.5) были использованы свойства резольвенты

$$\left. \begin{aligned} (1 - K^*)(1 + R^*) &= 1 \\ (1 - K^*)R^* &= K^* \end{aligned} \right\}. \quad (3.8)$$

В случае отсутствия теплового потока будем иметь $\lambda(r, t) \equiv 0$. Запишем для этого случая сразу выражение

$$(1 + R^*)\Phi(A, r, t) = \frac{3R_1^2 R_2^2}{(R_2^3 - R_1^3)r^3} \left\{ q_2(t) - q_1(t) - \frac{\beta}{\lambda m} \frac{3^{m-1}(R_2^{3m} - R_1^{3m})}{(R_2^3 - R_1^3)^m} R^* [q_2(t) - q_1(t)]^m \right\}. \quad (3.9)$$

§ 4. Точечный источник тепла в бесконечном массиве

Бесконечный массив может быть рассматриваем как сферический сосуд с незагруженными полостями радиусов $R_1 \rightarrow 0$ и $R_2 \rightarrow \infty$. Из условия однозначности решения Паркусом [4] (стр. 32 и 107) было доказано, что в аналогичной упругой задаче перемещения во всяком случае растут, стремясь к бесконечности, не быстрее, чем $\frac{1}{r}$, а напряжения — не быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$.

Применяя это к формуле (2.14), получим

$$A(t) = 3\lambda_0 \int_{r \rightarrow 0} r^2 \Delta T(r, t) dr. \quad (4.1)$$

Рассмотрим точечный источник тепла с периодически изменяющейся производительностью

$$S(t) = S_0 \cos \omega t.$$

Решением уравнения теплопроводности будет

$$T(r, t) = \frac{S_0}{4\pi i r} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} r} \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} r \right), \quad (4.2)$$

где i — коэффициент теплопроводности, а a — коэффициент температуропроводности.

Здесь получим

$$A(t) \equiv 0,$$

$$\Phi(A, r, t) = -\frac{\lambda E S_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} r}}{4\pi i (1 - \nu) r} \left\{ \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{2\omega}} \sin \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} r \right) + \right.$$

$$+ \left[\cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} r \right) + \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2a}{\omega}} \sin \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} r \right) \right] \times \\ \times \left(1 + 3 \sqrt{\frac{a}{2\omega}} \cdot \frac{1}{r} \right). \quad (4.3)$$

§ 5. Сферический сосуд с несжимаемой жидкостью

Будем считать перемещения точек сосуда равными нулю при температуре T_0 и при отсутствии нагружения, когда $R_1 = R_0$. Пусть, кроме того, объем жидкости, которая должна быть заключена в сосуд, при T_0 составляет V_0 . В таком случае перемещение внутренней полости сосуда определится из формулы

$$u(r, t)|_{R_1} = \sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} [1 + \alpha_n (T_n(t) - T_0)] - R_0, \quad (5.1)$$

где α_n — коэффициент линейного расширения заключенной в сосуд жидкости, а

$$T_n(t) = \frac{1}{V} \int_V T_n(r, t) dV, \quad (5.2)$$

где $T_n(r, t)$ — поле температур в жидкости.

Подставляя (5.1) в (2.14), получим

$$\sigma_r|_{R_1} = \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{R_1} \sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} \left[1 + \alpha_n \left(\frac{1}{V} \int_V T_n(r, t) dV - T_0 \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{R_0}{R_1} - \frac{3\alpha_0}{R_1^3} \left[\int r^2 \Delta T(r, t) dr \right] \Big|_{R_1} - \frac{A(t)}{R_1^3} \right\}. \quad (5.3)$$

Здесь можно принять $\sigma_r|_{R_1} = q_1(t)$ и подставить это в (3.2) для определения $A(t)$. То обстоятельство, что $q_1(t)$ будет зависеть от $A(t)$, приведет к наличию соответствующего коэффициента при R^* в первом члене левой части (3.2), и полученное уравнение решится аналогичным образом.

Задача существенно упрощается, если принять несжимаемость материала сосуда, т. е. принять $k=0$. Тогда (2.14) и (5.1) сразу дадут

$$A(t) = R_1^3 \left\{ \sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} \left[1 + \alpha_n \left(\frac{1}{V} \int_V T_n(r, t) dV - T_0 \right) \right] - R_0 \right\} - \\ - 3\alpha_0 \left[\int r^2 \Delta T(r, t) dr \right] \Big|_{R_1}. \quad (5.4)$$

Если при T_0 никаких напряжений в наполненном сосуде не было, а затем температура изменялась настолько медленно, что можно в каждый момент времени все точки сосуда считать одинаково нагретыми, то вместо (5.4) будем иметь

$$A(t) = R_1^3 (\alpha_{ж} - \alpha_0) (T(t) - T_0). \quad (5.5)$$

Формула (5.5) верна и для жесткого шара, вкрапленного в массив.

§ 6. Тонкостенный сферический сосуд

Как было показано выше, решение задачи о толстостенном сосуде под действием теплового потока и давлений на полости дается формулами (2.27)–(2.29), где $\Phi(A, r, t)$ берется из (2.17), а $A(t)$ — из (3.5) с подстановкой $A_0(t)$ из (3.6), $B(t)$ же определяется из удовлетворения одному из краевых условий. Поскольку практическое применение этого решения затруднительно, постараемся дать приближенное решение, которое оказывается тем точнее, чем тоньше стенки сосуда. Для этого будем пренебрегать $\varepsilon_r(r, t)$, а кроме того, положим, что $\varepsilon_r(r, t)$ получает свое среднее значение в сфере радиуса

$$R_{cp} = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

В таком случае, имея из (2.28)

$$\varepsilon_r(r, t) = \frac{1}{2} \left\{ (1 + R^*) \Phi(A, r, t) + \frac{\beta}{2} R^* [(1 + R^*) \Phi(A, r, t)]^m \right\}, \quad (6.1)$$

уравнение (3.1) можем записать в виде

$$\varepsilon_r(R_{cp}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_r(R_{cp}, t) = \frac{R_{cp}}{2(R_2 - R_1)} [q_2(t) - q_1(t)]. \quad (6.2)$$

Подставляя (6.2) и (2.17) в (2.15), при $r = R_{cp}$ получим

$$\begin{aligned} A(t) = & \frac{1 - \nu}{E} R_{cp}^3 \frac{q_2(t) - q_1(t)}{R_2 - R_1} - i \lambda \frac{R_{cp}^3 (1 - \nu)}{E (R_2 - R_1)} \int_0^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \times \\ & \times \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - i \beta \frac{R_{cp}^{3-m} (1 - \nu)}{E (R_2 - R_1)^m} \int_0^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)]^m \times \\ & \times \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \lambda (R_{cp}, t), \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $\lambda(r, t)$ берется по формуле (3.3).

В качестве примера рассмотрим находящуюся в некотором центрально-симметричном стационарном температурном поле ненагруженную бетонную оболочку, повороты сечений которой фиксированы (оболочка может быть и армированной посередине сечения материалом, имеющим то же α_0).

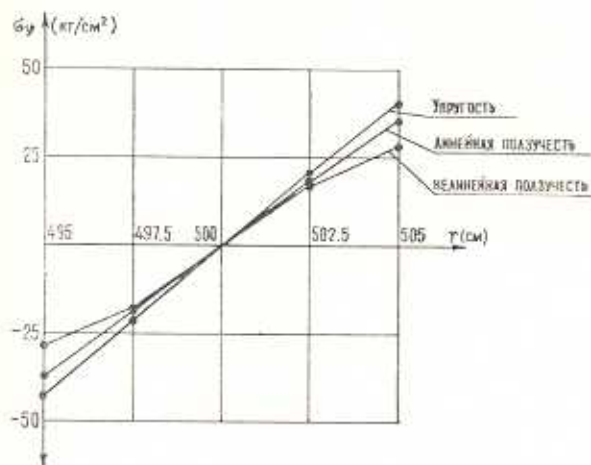
Принимая

$$C(t, \tau) = C_0 (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$$

и используя (6.1) и (6.3), получим приближенную формулу для вычисления σ_z

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, t) = & \frac{\Phi(A, r)}{2} \left[1 - \frac{\lambda \alpha C_0}{1 + \lambda \alpha C_0} (1 - e^{-\gamma(1 + \lambda \alpha C_0)(t - \tau_1)}) \right] - \\ & - \frac{\beta}{2\alpha} \Phi''(A, r) \left[\frac{\lambda \alpha C_0}{1 + \lambda \alpha C_0} (1 - e^{-\gamma(1 + \lambda \alpha C_0)(t - \tau_1)}) - \right. \\ & \left. - m \left(\frac{\lambda \alpha C_0}{1 + \lambda \alpha C_0} \right)^2 (1 - e^{-\gamma(1 + \lambda \alpha C_0)(t - \tau_1)}) - \frac{m (\lambda \alpha C_0)^2}{1 + \lambda \alpha C_0} \gamma e^{-\gamma(1 + \lambda \alpha C_0)(t - \tau_1)} (t - \tau_1) \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Результаты вычислений для $E = 210000 \text{ кг/см}^2$, $m = 4$, $\alpha = 0,999995$, $\beta = 5 \cdot 10^{-6} (\text{кг/см}^2)^{1-m}$, $C_0 = 0,28 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}$, $\gamma = 0,03 \text{ 1/день}$, $\nu = 0,25$, $\alpha_0 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$, $R_{cp} = 500 \text{ см}$, $R_2 - R_1 = 10 \text{ см}$, $T_2 - T_1 = 50^\circ$ приведены в таблице 1 и графически изображены на фиг. 1.



Фиг. 1. Значения σ_z при $t \rightarrow \infty$.

Таблица

		Значения $\sigma_z(r, t)$			
r (см)	$t - \tau_1$ (дн.)	0	10	30	∞
	495		-43,07	-41,30	-39,24
			-40,96	-36,96	-28,67
497,5		-21,27	-20,42	-19,40	-18,39
			-20,40	-19,26	-17,88
500		0	0	0	0
			19,90	18,90	17,91
502,5		20,73	19,88	18,78	17,45
			39,35	37,35	35,40
505		40,97	39,07	35,48	28,42

В табл. 1 верхние значения соответствуют линейной ползучести, а нижние — нелинейной.

Легко видеть, что эффект от нелинейной ползучести проявляется лишь по истечении значительного времени.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 III 1966

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆԻԱՆ

ՈՉ ԳՆԱՅԻՆ ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿԵՆՏՐՈՆԱՍԻՄԵՏՐԻԿ
ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատության մեջ դիտարկված են ոչ զծային ժառանգականության տեսության կենտրոնատիմեարիկ շերտային մի քանի խնդիրներ՝ շերտային կետային աղբյուր անկցող անսահման մարմնի, ինչպես նաև շերտային հոսքի աղղեցության տակ գանձող զնդածև անոթների համար:

Ստացված ոչ զծային ինտեգրալ համասարույթները լուծված են [2] աշխատանքում շարադրված մեթոդով: Լուծումները արված են կամայական չկայունացված հոսքի և Պուասսոնի գործակցի կամայական արժեքների համար:

Բարակապատ անոթի դեպքում կատարված են պարզեցնող հետևյալ երկու բնորոշելությունները՝

ա) շտապղային z , լարումը արձամարելի փոքր է,

բ) շրջանային z , լարումը զնդածև անոթի միջին մակերևույթում բնորոշում է միջին արժեք:

A. M. SIMONIAN

SOME TEMPERATURE CENTRAL SYMMETRICAL PROBLEMS OF NON-LINEAR HEREDITY

S u m m a r y

In the present paper the following problems have been investigated.

1. Thick wall spherical vessels under the influence of heat flow and pressure on the surface.
2. Point source of heat in a massive.
3. Spherical vessels with incompressible fluids.
4. Thin wall spherical vessels.

The method for solving non-linear Wolker's integral equations of the second type which is proposed in paper [2] is also used in this article.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1952.
2. Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ, № 6, 1958.
3. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Ползучесть сферического сосуда. Докл. АН Арм.ССР, 27, № 4, 1958.
4. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения: Физматгиз, М., 1963.
5. Симонян А. М. О двух температурных задачах пластической наследственности. Известия АН Арм.ССР, Механика, № 1, 1966.