ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XIX, № 3, 1966 Механика

А. Ш. ПЕТОЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГЛОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ ПРИ ЕЁ СЖАТИИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

§ 1. Основное уравнение задачи

В статье [6] уточненная теория изгиба трансверсально-изотропной плиты во втором приближении приведена к интегрированию уравнений

$$\nabla^4\Phi_0 = \frac{q}{D}, \quad \nabla^2\varphi - \frac{2}{s_0^2 h^2}\varphi = 0, \tag{1.1}$$

где D — цилиндрическая жесткость, h — полутолщина плиты, q — поперечная нагрузка;

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}, \qquad s_0^2 = \frac{G}{G_1}, \tag{1.2}$$

E и G — упругие постоянные в плоскостях изотропии, параллельных срединной плоскости, G_1 — модуль сдвига в перпендикулярном направлении.

При осесимметричных деформациях плиты $\varphi = 0$, и задача приводится к интегрированию первого из уравнений (1.1) при кинематических краевых условиях, налагаемых на прогиб w_0 и элементарное вращение ω_r, и статических условиях, налагаемых на поперечную силу N_r и радиальный изгибающий момент M_r на контуре плиты.

Перечисленные величины определяются через функцию Φ_0 формулами:

$$w_0 = \left[1 + \frac{3\mu_2 - 8s_0^2}{10(1-\mu)} h^2\nabla_r^2\right]\Phi_0,$$

$$\omega_r = \left[1 - \frac{7}{15}\frac{s_0^2 - \mu_2}{1-\mu} h^2\nabla_r^2\right]\frac{d\Phi_0}{dr}, \tag{1.3}$$

$$N_r = -D\frac{d}{dr}\nabla_r^2\Phi_0,$$

$$M_r = -D\left(\frac{d^2}{dr^2} + \mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{2}{5}\mu_2 h^2\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\nabla_r^2\right)\Phi_0. \tag{1.4}$$

В рассматриваемых в данной статье задачах устойчивости вместо q нужно подставить

$$q = -T\nabla_r^2 w_0. \tag{1.5}$$

Уравнение устойчивости записывается в виде

$$\Delta_\rho^4 \Phi_0 + k\nabla_\rho^2 (1 - \alpha^2 \nabla_\rho^2) \Phi_0 = 0, \tag{1.6}$$

где

$$\Delta_\rho^2 = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}, \; \rho = \frac{r}{R}, \quad k = \frac{TR^2}{D}, \quad \alpha^2 = \frac{8s_0^2 - 3\mu_2}{10(1-\mu)}\left(\frac{h}{R}\right)^2. \tag{1.7}$$

Общий интеграл уравнения (1.6) с учетом условий в центре плиты $\frac{dw_0}{d\rho} = 0$ и $N = 0$ при $\rho = 0$ записывается так:

$$\Phi_0 = c_1 J_0(\lambda\rho) + c_2, \tag{1.8}$$

где $J_0(\lambda\rho)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а коэффициент λ задается формулой

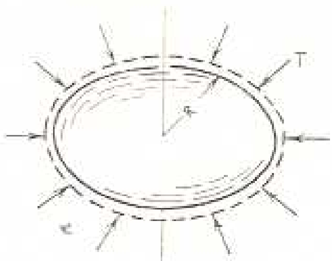
$$\lambda^2 = \frac{k}{1 - \alpha^2 k}. \tag{1.9}$$

§ 2. Плита, свободно опертая по контуру

В (1.8) постоянную c_2 можно принять равной нулю, а c_1 нужно определить из условий $M_r = 0$ при $\rho = 0$. Подставив (1.8) в уравнение (1.4) и учитывая, что

$$\nabla_\rho^2 J_0(\lambda\rho) = -\lambda^2 J_0(\lambda\rho),$$

$$\frac{d}{d\rho} J_0(\lambda\rho) = -\lambda J_1(\lambda\rho), \tag{2.1}$$



Фиг. 1.

получим характеристическое уравнение для определения λ

$$J_0(\lambda) - \frac{1 - \mu - \beta\lambda^2}{\lambda} J_1(\lambda) = 0, \tag{2.2}$$

где

$$\beta^2 = \frac{2}{5}\mu_2\frac{h^2}{R^2}. \tag{2.3}$$

Определив из (2.2) λ, для критической нагрузки $T = T_{кр}$ получаем формулу

$$T_{кр} = k\frac{D}{R^2}, \quad k = \frac{\lambda^2}{1 - \alpha^2\lambda^2}. \tag{2.4}$$

При $\beta = 0$ формула (2.2) дает уравнение для определения λ по классической теории изгиба плит. Как видно из (2.2), корни уравнения (2.2) зависят от величин μ и β.

§ 3. Плита, зажатая по контуру

В этом случае характеристическое уравнение получается из условия $w_r = 0$ при $\rho = 1$. Имеем

$$J_1(\lambda) = 0. \tag{3.1}$$

В отличие от предыдущего случая (2.2), здесь λ определяется независимо от других параметров (β и μ). Наименьший корень уравнения (3.1) будет $\lambda = 3,832$, поэтому для коэффициента первой критической нагрузки получаем формулу

$$k = \frac{14,68}{1 + 14,68\,\alpha^2}. \qquad (3.2)$$

В таблицах 1—5 приведены значения коэффициента k и разница между значениями критической нагрузки, вычисленными по формуле (2.4), и значениями, даваемыми классической теорией изгиба плит, для ряда отношений $\frac{h}{R}$ при $\mu = 0.3$.

Фиг. 2.

В табл. 1 приведены результаты для изотропной плиты, а в табл. 2, 3, 4 и 5 даны результаты для трансверсально-изотропной плиты при некоторых отношениях

$$\frac{G}{G_1} = s_0^2, \quad \mu_2 = \frac{E}{E_1}\mu_1 = 0.25\frac{E}{E_1}.$$

Таблица 1

	$\frac{h}{R}$	k	$\frac{T^*-T}{T^*}\cdot 100\%$
Свободно опёртый край	1/6	3,7795	10,012
	1/8	3,948	6,000
	1/10	4,035	3,926
	1/12	4,082	2,800
Зажатый край	1/6	10,404	29,129
	1/8	11,917	18,824
	1/10	12,784	12,915
	1/12	13,312	9,322

Таблица 2

	$\frac{G}{G_1} = 2$	$\frac{E}{E_1} = 2$	
	$\frac{h}{R}$	k	$\frac{T^*-T}{T^*}\cdot 100\%$
Свободно опёртый край	1/8	3,715	11,552
	1/10	3,873	7,788
	1/12	3,966	5,567
Зажатый край	1/8	9,948	32,230
	1/10	11,259	23,370
	1/12	12,118	17,452

Из приведенных таблиц видно, что расхождение величин критической нагрузки от вычисленных по классической теории во всех случаях является более значительным для зажатой пластинки. Для свободно опертой пластинки вносимая поправка незначительна для изотропных пластинок и существенна для сравнительно толстых трансверсально-изотропных пластинок.

В заключение отметим, что в работе [6] рассмотрена задача об устойчивости зажатой по контуру трансверсально-изотропной пластинки на основе гипотезы о нерастяжимом нормальном элементе ($\varepsilon_z = 0$, $\sigma_z = 0$) и о параболическом законе распределения касательных напряжений по толщине плиты [1]. Для коэффициента устойчивости k в ра-

Таблица 3

	$\frac{G}{G_1}=3$	$\frac{E}{E_1}=3$	
	$\frac{h}{R}$	k	$\frac{T^*-T}{T^*}\cdot 100\%$
Свободно опёртый край	1/8	3,522	16,140
	1/10	3,734	11,086
	1/12	3,840	8,571
Зажатый край	1/8	8,575	41,586
	1/10	10,079	31,335
	1/12	11,158	23,989

Таблица 4

	$\frac{G}{G_1}=4$	$\frac{E}{E_1}=4$	
	$\frac{h}{R}$	k	$\frac{T^*-T}{T^*}\cdot 100\%$
Свободно опёртый край	1/8	3,340	20,476
	1/10	3,609	14,062
	1/12	3,763	10,398
Зажатый край	1/8	7,529	48,711
	1/10	9,131	37,799
	1/12	10,329	29,642

боте [6] принята формула вида (3.2), в которой вместо α^2 получено выражение

$$\alpha_1^2=\frac{2E}{5(1-\mu^2)\,G_1}\,\frac{h^2}{R}. \tag{3.3}$$

Из пяти упругих постоянных для трансверсально-изотропной среды в (3.3) входят только три. Остальные коэффициенты μ_1 и E_1 потеряны при пренебрежении в обобщенном законе Гука нормального напряжения σ_z по сравнению с σ_x и σ_y.

Таблица 5

	$\frac{G}{G_1}=5$	$\frac{E}{E_1}=5$	
	$\frac{h}{R}$	k	$\frac{T^*-T}{T^*}\cdot 100\%$
Свободно опёртый край	1/8	3,126	25,564
	1/10	3,448	17,910
	1/12	3,638	13,373
Зажатый край	1/8	6,468	55,943
	1/10	8,102	44,807
	1/12	9,393	29,202

Из сравнения (3.3) с формулой (1.7) для α^2 имеем

$$\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}=1-\frac{3}{8}\mu_2\frac{G_1}{G}. \tag{3.4}$$

Если положить $\mu_2=0$, то приходим к соответствующим результатам, полученным в работе [6].

Для изотропной плиты ($G_1=G$ и $\mu_2=\mu=0.3$) получаем $\alpha^2=0.887\,\alpha_1^2$. Поэтому коэффициент устойчивости k для изотропной плиты по нашим результатам будет больше, чем по результатам работы [6]. Для изотропной плиты поправка к классической теории в нашей работе совпадает с соответствующей поправкой, полученной в работе [4].

Что же касается трансверсально-изотропной плиты, то отношение $\alpha^2:\alpha_1^2$ зависит от конкретных значений величины $\mu_2 G_1:G$.

Ереванский политехнический институт

Поступила 24 V 1965

Ա. Շ. ՊԵՏՈՅԱՆ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵԶՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՈՒԺԵՐՈՎ ԱՅՆ ՍԵՂՄԵԼԻՍ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկված է տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված կլոր սալի կայունության խնդիրը, երբ սալի ամբողջ եզրով ազդում են հավասարաչափ բաշխված շառավղային սեղմող ուժեր: Աշխատության հիմքում ընկած է սալերի ծռման ճշգրտված [8] տեսությունը:

A. Sh. PETOYAN

ON THE FIRMNESS OF TRANSVERSAL -ISOTROPIC CIRCULAR PLATE

S u m m a r y

In this paper are considered the problems of the stability of circular plate in the case of the action of constant load uniform compression in radial direction for the whole contour.

On the foundation of the solution of these problems lies the specified theory [8] of the plate bend.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок. Известия АН СССР, ОТН, № 5, 1958.
2. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1955, гл. III и IV.
3. *Лехницкий С. Г.* Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты. ПММ, 26, вып. 4, 1962.
4. *Муштари Х. М.* Теория изгиба плит средней толщины. Известия АН СССР, ОТН, мех. и машиностр., № 2, 1959.
5. *Понятовский В. В.* К теории пластин средней толщины. ПММ, 26, вып. 2, 1962.
6. *Хачатурян Т. Т.* К теории изгиба и сжатия толстых плит. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 6, 1963.
7. *Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях круглых трансверсально-изотропных пластинок. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 1, 1960.
8. *Петоян А. Ш.* К теории изгиба трансверсально-изотропной плиты. Сборник научных трудов ЕрПИ, 22, серия строительной механики, 1964.