ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 3, 1966 Механика

А. П. МЕЛКОНЯН, А. А. ХАЧАТРЯН

О КОЛЕБАНИЯХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

Исходя из уточненной теории анизотропных пластинок, изложенной в работе [1], решаются задачи о колебаниях круглых трансверсально-изотропных пластинок при различных условиях закрепления по контуру. Полученные результаты для некоторых частных случаев сравниваются с соответствующими результатами, получаемыми по классической теории пластинок.

1. Задача об изгибе трансверсально-изотропных пластинок по уточненной теории С. А. Амбарцумяна [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов и нормальных напряжений в плоскостях, параллельных срединной плоскости пластинки, приводится к следующей системе двух независимых уравнений относительно нормального перемещения w и некоторой функции Φ [2]

$$D\Delta\Delta w = Z - k_0 \Delta Z,$$
$$\Delta\Phi - \zeta_0^2\Phi = 0. \tag{1.1}$$

Изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы выражаются через функции w и Φ следующим образом:

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right] - \frac{2D}{\zeta_0^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\Delta w +$$
$$+ \frac{2}{\zeta_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) - k_0\left[Z - \frac{2}{\zeta_0^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2}\right)\right],$$

$$M_\theta = -D\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right] + \frac{2D}{\zeta_0^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\Delta w) -$$
$$- \frac{2}{\zeta_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) - k_0\left(Z - \frac{2}{\zeta_0^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}\right), \tag{1.2}$$

$$H = -(1-\nu)D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - \frac{2D}{\zeta_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta w)\right] +$$
$$+ \Phi - \frac{2}{\zeta_0^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{2k_0}{\zeta_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial \theta}\right),$$

$$N_r = -D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - k_0\frac{\partial Z}{\partial r},$$

$$N_\theta = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Delta w) - \frac{\partial\Phi}{\partial r} - k_0\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial\theta},$$

где

$$\xi_0^2 = \frac{10\,G'}{Gh^2}, \qquad k_0 = \frac{h^2}{10(1-\mu)}\left(2\frac{G}{G'} - \mu'\frac{E}{E'}\right), \tag{1.3}$$

Δ — оператор Лапласа; h, D — толщина и изгибная жесткость пластинки; E, G, μ — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии, параллельной срединной плоскости пластинки; E', G', μ' — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскостях, перпендикулярных плоскости изотропии; Z — интенсивность распределенной поперечной нагрузки.

Уравнения свободных колебаний ненагруженной пластинки, а также все необходимые расчетные величины получим из приведенных выше формул, если в них положить

$$Z = -\frac{\gamma_0 h}{g}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.4}$$

где γ_0 — удельный вес материала пластинки, g — ускорение силы тяжести.

2. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях сплошной круглой пластинки радиуса a, изготовленной из трансверсально-изотропного материала.

Подставив (1.4) в (1.1), для свободных колебаний ненагруженной пластинки получим следующие уравнения

$$\Delta\Delta w + \frac{\gamma_0 h}{gD}(1 - k_0\Delta)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta\Phi - \xi_0^2\Phi = 0. \tag{2.1}$$

Решение уравнений (2.1), соответствующее колебанию пластинки с n узловыми диаметрами, можно представить в форме

$$w(r, \theta, t) = W(r)\cos n\theta\cos\omega t,$$

$$\Phi(r, \theta, t) = F(r)\sin n\theta\cos\omega t, \tag{2.2}$$

где ω — круговая частота собственных колебаний пластинки.

Тогда для $W(r)$ и $F(r)$ получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\Delta_n\Delta_n W - \frac{\gamma_0 h}{gD}\omega^2(1 - k_0\Delta_n)W = 0,$$

$$\Delta_n F - \xi_0^2 F = 0, \tag{2.3}$$

где

$$\Delta_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}. \tag{2.4}$$

Общее решение уравнений (2.3) имеет вид

$$W(r)=C_1 J_n(\alpha_0 r)+C_2 Y_n(\alpha_0 r)+C_3 I_n(\beta_0 r)+C_4 K_n(\beta_0 r),$$
$$F(r)=C_5 I_n(\delta_0 r)+C_6 K_n(\delta_0 r), \tag{2.5}$$

где J_n, Y_n и I_n, K_n — функции Бесселя действительного и мнимого аргументов; $C_1, \cdots, C_6$ — постоянные интегрирования;

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_0\\ \beta_0\end{array}\right\}=\left[\sqrt{\left(\frac{\gamma_0 h\omega^2 k_0}{2gD}\right)^2+\frac{\gamma_0^2 h\omega^2}{gD}}\pm\frac{\gamma_0 hk_0\omega^2}{2gD}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

В силу того, что пластинка сплошная, в (2.5) следует положить $C_2=C_4=C_6=0$. На основании этого из (2.2) и (2.5) окончательно будем иметь

$$w(r,\vartheta,t)=[C_1 J_n(\alpha_0 r)+C_3 I_n(\beta_0 r)]\cos n\vartheta\cdot\cos\omega t,$$
$$\Phi(r,\vartheta,t)=C_5 I_n(\delta_0 r)\sin n\vartheta\cdot\cos\omega t. \tag{2.7}$$

Постоянные интегрирования C_1, C_3, C_5, входящие в (2.7), должны определяться из условий закрепления пластинки по контуру $r=a$.

Рассмотрим два случая закрепления пластинки по контуру.

а) Пластинка шарнирно закреплена по контуру

В случае шарнирного закрепления пластинки по контуру имеем следующие граничные условия [1]:

$$\text{при } r=a\left\{\begin{array}{l}w=0,\\ M_r=0,\end{array}\right.\quad \psi=\frac{12}{h^3}N_\theta=0. \tag{2.8}$$

Пользуясь выражениями (1.2), (1.4), (2.7), из граничных условий (2.8) получим следующую однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных C_1, C_3, C_5:

$$C_1 J_n(\alpha)+C_3 I_n(\beta)=0,$$
$$C_1\left\{\alpha^2\left(1+\frac{2n^2}{\delta^2}\right)J_n(\alpha)+\alpha\left[(1-\nu)-\frac{2\beta^2}{\delta^2}\right]J_n'(\alpha)\right\}+$$
$$+C_3\left\{-\beta^2\left(1-\frac{2n^2}{\delta^2}\right)I_n(\beta)+\beta\left[(1-\nu)+\frac{2\alpha^2}{\delta^2}\right]I_n'(\beta)\right\}+$$
$$+C_5\frac{2a^2n}{\delta^2 D}[\delta I_n'(\delta)-I_n(\delta)]=0, \tag{2.9}$$

$$C_1\alpha^2 J_n(\alpha)-C_3\beta^2 I_n(\beta)+C_5\frac{a^2\delta}{nD}\cdot I_n'(\delta)=0,$$

где

$$\alpha=\alpha_0 a,\qquad \beta=\beta_0 a,\qquad \delta=\delta_0 a,$$

$$J_n'(x)=J_{n-1}(x)-\frac{n}{x}J_n(x),\quad I_n'(x)=I_{n-1}(x)-\frac{n}{x}I_n(x). \tag{2.10}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, после некоторых преобразований получим следующее трансцендентное уравнение для определения частот собственных колебаний пластинки

$$(1-\nu)\left[\beta\frac{I_{n-1}(\beta)}{I_n(\beta)}-\alpha\frac{J_{n-1}(\alpha)}{J_n(\alpha)}\right]-\frac{2\alpha\beta}{\zeta^2}\left[\alpha\frac{I_{n-1}(\beta)}{I_n(\beta)}+\beta\frac{J_{n-1}(\alpha)}{J_n(\alpha)}\right]$$

$$-(\alpha^2-\beta^2)\left[1-\frac{2n}{\zeta^2}\frac{I_{n-1}(\zeta)}{I_n(\zeta)}\right]=0. \qquad (2.11)$$

Следует отметить, что между α и β существуют следующие вытекающие из (2.6) зависимости

$$\alpha^2\beta^2=\frac{\gamma_0 h a^4 \omega^2}{gD}, \quad \beta=\frac{\alpha}{\sqrt{1-k\alpha^2}}; \quad \left(k=\frac{k_0}{a^2}\right). \qquad (2.12)$$

Частоты собственных колебаний ω_{nj} для каждого значения n и j ($n=0, 1, 2, \cdots j=1, 2\cdots$), согласно (2.12), определяются через корни уравнения (2.11) следующей формулой

$$\omega_{nj}=\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{gD}{\gamma_0 h}\cdot\frac{\alpha_{nj}^2}{\sqrt{1-k\alpha_{nj}^2}}}, \qquad (2.13)$$

где α_{nj} — j-тый корень уравнения (2.11) при фиксированном значении n.

Из уравнения (2.11), как частный случай, можно получить соответствующее уравнение для определения частот собственных колебаний, найденное по классической теории пластинок. Для этого полагая в уравнении (2.11) $k=0$ и выполняя предельный переход при $\zeta\to\infty$, получим [3]

$$\frac{I_{n-1}(\alpha)}{I_n(\alpha)}-\frac{J_{n-1}(\alpha)}{J_n(\alpha)}=\frac{2\alpha}{1-\nu}. \qquad (2.11^*)$$

Соответствующие же частоты собственных колебаний определяются через корни уравнения (2.11*) по формуле (2.13) при $k=0$.

Очевидно, что при учете деформаций поперечных сдвигов и нормальных напряжений, действующих в плоскостях, параллельных срединной плоскости (характеризуемых отношениями $\frac{E}{G}$ и $\frac{E}{E'}$ соответственно), нахождение корней уравнения частот (2.11), а следовательно, и определение частот собственных колебаний существенно осложняется.

На основании полученных выше формул произведены вычисления*) корней уравнения (2.11) и соответствующих им частот при некоторых значениях отношений упругих постоянных $\left(\frac{E}{G}\right)$ и относительной толщины пластинки $\left(\frac{h}{a}\right)$ с учетом лишь поперечных сдвигов $\left(\frac{E}{E'}=0\right)$.

* Вычисления выполнены на ЭВМ „Раздан-2" Вычислительного центра АН АрмССР.

Таблица 1

E/G		0		2,6		5	
		α_{nj}	ω^0_{nj}	α_{nj}	ω^0_{nj}	α_{nj}	ω^0_{nj}
$\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$	$n=0$	2,2215 5,4516	4,9352 29,7201	2,2227 5,4541	4,9057 28,5585	2,2237 5,4563	4,8791 27,5991
	$n=1$	3,7280 6,9627	13,8982 48,4790	3,7298 6,9658	13,6426 45,4728	3,7313 6,9684	13,4188 43,1430
	$n=2$	5,0610 8,3736	25,6134 70,1171	5,0633 8,3775	24,7463 64,0505	5,0653 8,3801	24,0196 59,6544
$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$	$n=0$			2,2260 5,4606	4,8206 25,7515	2,2300 5,4669	4,7216 23,2190
	$n=1$			3,7346 6,9733	12,9530 38,9856	3,7399 6,9797	12,2325 33,8545
	$n=2$			5,0694 8,3852	22,5938 52,3557	5,0755 8,3914	20,5845 44,1169

В табл. 1 приведены значения первых двух корней α_{nj} $(j=1;\ 2)$ уравнения (2.11) и соответствующие им величины

$$\omega^0_{nj} = a^2\sqrt{\frac{\gamma_0 h}{gD}}\,\omega_{nj}$$

для каждого из значений $n=0,\ 1,\ 2$.

Во всех расчетах принималось $\mu=0{,}3$.

Отметим, что рассмотренный здесь случай $E/G'=0$ соответствует результатам классической теории пластинок, а $E/G'=2{,}6$ — случаю изотропной пластинки.

Здесь при $E/G'=0$ не приведены значения α_{nj} и ω^0_{nj} для случая $\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$, так как они совпадают с соответствующими результатами при $\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$, поскольку, как известно, результаты классической теории не зависят от отношений $\frac{h}{a}$.

Результаты вычислений, приведенные в таблице 1, показывают, что частоты собственных колебаний пластинки при учете поперечных сдвигов заметно отличаются (в сторону уменьшения) от соответствующих частот, найденных по классической теории пластинок. Это расхождение увеличивается с увеличением отношений E/G' и $\frac{h}{a}$, причем, оно тем больше, чем больше n и j.

б) Пластинка защемлена по контуру

В случае защемления пластинки по контуру имеем следующие граничные условия:

$$
\text{при } r=a \begin{cases} w=0 \\ u_r=-z\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{6}{h^3G'}\left(\dfrac{h^2}{4}z-\dfrac{z^3}{3}\right)\cdot N_r=0 \\ u_\theta=-z\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}+\dfrac{6}{h^3G'}\left(\dfrac{h^2}{4}z-\dfrac{z^3}{3}\right)\cdot N_\theta=0 \end{cases} \Bigg|\; z=z_0. \tag{2.14}
$$

Здесь, как и в [2,4], принимается, что условия равенства нулю тангенциальных перемещений u_r и u_θ в защемлении выполняются лишь по двум окружностям $z=\pm z_0$ $\left(0<z_0\leqslant\dfrac{h}{2}\right)$ боковой поверхности пластинки.

Пользуясь выражениями (1.2), (1.4) и (2.7), из граничных условий (2.14) после некоторых преобразований получим следующую однородную систему алгебраических уравнений относительно C_1, C_2, C_3

$$
\begin{gathered}
C_1J_n(\alpha)-C_2I_n(\beta)=0,\\
C_1(1-q\beta^2)\alpha J_n'(\alpha)+C_2(1+q\alpha^2)\beta I_n'(\beta)-C_3\frac{na^2}{D}qI_n(\gamma)=0, \qquad (2.15)\\
C_1\alpha^2J_n(\alpha)-C_2\beta^2I_n(\beta)-C_3\frac{a^2\gamma}{nD}I_n'(\gamma)=0,
\end{gathered}
$$

где

$$
q=\frac{10}{(1-\nu)\gamma^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{z_0^2}{3h^2}\right).
$$

Приравнивая нулю определитель системы (2.15), получим следующее трансцендентное уравнение для определения частот собственных колебаний пластинки

$$
\begin{gathered}
\beta\frac{I_{n-1}(\beta)}{I_n(\beta)}-\alpha\frac{J_{n-1}(\alpha)}{J_n(\alpha)}+\\
+\frac{10}{(1-\nu)\gamma^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{z_0^2}{3h^2}\right)\Bigg|\alpha\beta\left[\alpha\frac{I_{n-1}(\beta)}{I_n(\beta)}-\beta\frac{J_{n-1}(\alpha)}{J_n(\alpha)}\right]-\\
-n(\alpha^2+\beta^2)\frac{I_{n-1}(\gamma)}{I_n(\gamma)}\Bigg|=0. \qquad (2.16)
\end{gathered}
$$

Частоты собственных колебаний ω_{nj} определяются через корни уравнения (2.16) с помощью формулы (2.13).

Из (2.16), как частный случай (полагая $k=0$ и $\gamma\to\infty$), получается следующее уравнение частот, соответствующее классической теории пластинок [3,5]

$$
J_n(\alpha)\cdot I_{n-1}(\beta)-J_{n-1}(\alpha)\cdot I_n(\beta)=0. \tag{2.16*}
$$

Частоты же собственных колебаний определяются через корни уравнения (2.16*) по формуле (2.13) при $k=0$.

Здесь так же, как и в предыдущей задаче, вычислены корни уравнения (2.16) и соответствующие им частоты для тех же соотношений упругих постоянных и размеров пластинки при двух значениях отношения z_0/h.

Результаты вычислений при $\frac{z_0}{h}=\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{2}$ приведены соответственно в табл. 2 и 3.

Таблица 2

	E/G	0		2,6		5	
		α_{nj}	ω_{nj}^0	α_{nj}	ω_{nj}^0	α_{nj}	ω_{nj}^0
$\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$	$n=0$	3,1962 6,3064	10,2158 39,7711	3,1747 6,2143	9,9364 36,6488	3,1557 6,1418	9,6968 34,3314
	$n=1$	4,6109 7,7993	21,2604 60,8287	4,5601 7,6590	20,2035 54,2877	4,5178 7,5575	19,3544 49,8300
	$n=2$	5,9057 9,1969	34,8771 84,5827	5,8185 9,0052	32,3273 73,0694	5,7510 8,8800	30,4246 65,8657
$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$	$n=0$			3,1162 6,0131	9,2127 30,4149	3,0548 5,8616	8,5007 25,9346
	$n=1$			4,4357 7,3965	17,7776 42,9137	4,3229 7,2368	15,7334 35,7081
	$n=2$			5,6316 8,7041	27,1711 55,4634	5,4899 8,5557	23,3756 45,3202

Таблица 3

	E/G	0		2,6		5	
		α_{nj}	ω_{nj}^0	α_{nj}	ω_{nj}^0	α_{nj}	ω_{nj}^0
$\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$	$n=0$	3,1962 6,3064	10,2158 39,7711	3,1840 6,2521	9,9940 37,0739	3,1731 6,2083	9,8013 35,0134
	$n=1$	4,6109 7,7993	21,2604 60,8287	4,5809 7,7155	20,3824 55,0327	4,5555 7,6522	19,6616 50,9333
	$n=2$	5,9057 9,1969	34,8771 84,5827	5,8529 9,0805	32,6938 74,1797	5,8109 8,9994	31,0121 67,3743
$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$	$n=0$			3,1502 6,1269	9,4050 31,4027	3,1140 6,0230	8,8039 27,0594
	$n=1$			4,5048 7,5443	18,2838 44,3035	4,4319 7,4230	16,4159 37,0563
	$n=2$			5,7334 8,8734	28,0265 57,1239	5,6342 8,7482	24,3637 46,7315

Результаты вычислений, приведенные в табл. 2 и 3, приводят к аналогичным предыдущей задаче выводам.

Отметим также, что в рассматриваемой задаче при прочих одинаковых условиях с увеличением z_0 частоты собственных колебаний увеличиваются.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 IV 1965

Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ԿԼՈՐ ՍԱԼԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված կլոր սալերի սեփական տատանումների խնդիրը, ելնելով Ս. Ա. Համբարձումյանի կողմից առաջարկված սալերի ճշգրտված տեսությունից [1]։

Դիտարկված են սալի ամրացման երկու տարբեր դեպքեր. ա) երբ սալը եզրով ամրացված է հոդակապորեն և, բ) երբ սալը եզրով ամրակցված է։

Դիտարկված խնդիրների համար ստացված են տրանսցենդենտ հավասարումներ, որոնց միջոցով որոշվում են սալի սեփական տատանումների հաճախականությունները։ Աղյուսակներում բերված են թվային արդյունքները, որոնք համեմատված են սալերի կլասիկ տեսությունով ստացված համապատասխան արդյունքների հետ։

A. P. MELKONIAN, A. A. KHATCHATRIAN

ON THE VIBRATIONS OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC CIRCULAR PLATES

Summary

The problem of vibration of circular transversal isotropic plates is solved by the proposed improved theory of anisotropic plates (1) under various attaching conditions on the contour of plates.

The obtained results for some particular problems are compared with the corresponding results of the classical theory of plates (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Мелконян А. П., Хачатрян А. А.* Об устойчивости трансверсально-изотропных круглых пластинок. Известия АН АрмССР, Механика, 19, № 2, 1966.
3. *Боднер Б. А.* Устойчивость пластин под действием периодических сил. ПММ, 2, вып. 1, 1938.
4. *Москаленко В. Н.* К применению уточненных теорий изгиба пластинок в задаче о собственных колебаниях. Инженерный журнал, 1, вып. 3, 1961.
5. *Пономарев С. Д., Бидерман В. Л.* и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. III, Машгиз, М., 1959.