ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 3, 1966 Механика

В. В. МЕГЛИНСКИЙ

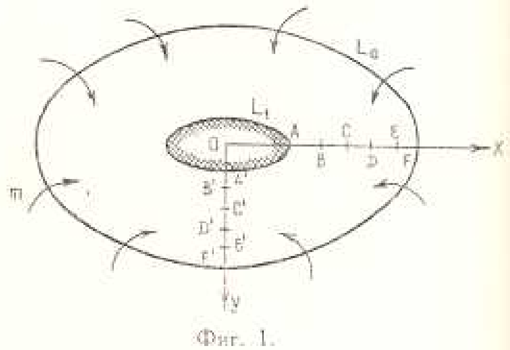
ИЗГИБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе [6] изложен метод решения задачи об изгибе анизотропной эллиптической плиты, ослабленной эллиптическими отверстиями.

В данной статье этим методом решена задача об изгибе эллиптической плиты с эллиптическим отверстием под действием изгибающих моментов, равномерно распределенных по внешнему контуру плиты. Внутренний контур считается жестко защемленным. Показано, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений, к решению которой приведено решение поставленной задачи, является квазирегулярной при любой близости между собой контуров, ограничивающих срединную плоскость плиты.

1. Рассмотрим упругое равновесие плоской однородной анизотропной эллиптической плиты постоянной толщины, ослабленной одним эллиптическим отверстием.

Предположим, что пластинка не является ортотропной, но имеет в каждой точке одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости пластинки. Обозначим область, занимаемую срединной плоскостью изгибаемой пластинки в плоскости XOY, через S, внешний контур — через L_0, внутренний — через L_1, а полуоси эллипсов—соответственно через a_0, b_0 и a_1, b_1.



Фиг. 1.

Будем считать, что контур L_1 жестко защемлен, а на контуре L_0 действуют равномерно распределенные изгибающие моменты интенсивности m (фиг. 1).

Задача о напряженно-деформированном состоянии такой плиты сводится, как известно, к определению функций $W_j(z_j)$ $(j = 1, 2)$ из соответствующих граничных условий. В рассматриваемом случае эти граничные условия удобно представить в виде

$$W_1'(t_1) + k_{11}\overline{W_1'(t_1)} + k_{21}\overline{W_2'(t_2)} = 0, \tag{1.1}$$

$$W_2'(t_2) + k_{31}\overline{W_1'(t_1)} + k_{41}\overline{W_2'(t_2)} = 0 \quad \text{на} \quad L_1;$$

$$W_1'(t_1)+k_{12}\overline{W_1'(t_1)}+k_{22}\overline{W_2'(t_2)}=m\mu_1 d\,(q_2\mu_2 y-p_2 x),$$
$$W_2'(t_2)+k_{32}\overline{W_1'(t_1)}+k_{42}\overline{W_2'(t_2)}=-m\mu_2 d\,(q_1\mu_1 y-p_1 x) \quad \text{на } L_0. \tag{1.2}$$

Здесь t_j — аффиксы точек на контурах соответствующих эллипсов, расположенных в областях изменения z_j; μ_j — комплексные параметры изгиба [4]:

$$k_{11}=\frac{\overline{\mu}_1-\mu_1}{\mu_1-\mu_2},\quad k_{21}=\frac{\overline{\mu}_2-\mu_2}{\mu_1-\mu_2},\quad k_{12}=\frac{\overline{\mu}_1}{\mu_1}d\,(\overline{\mu}_1 p_2\overline{q}_1-\mu_2\overline{p}_1 q_2), \tag{1.3}$$
$$k_{22}=\frac{\overline{\mu}_1}{\mu_2}d\,(\overline{\mu}_2 p_2\overline{q}_2-\mu_2\overline{p}_2 q_2),\quad d=(\mu_1 p_2 q_1-\mu_2 p_1 q_2)^{-1};$$

$$p_j=D_{11}+D_{12}\mu_j^2+2D_{16}\mu_j;\qquad q_j=D_{12}+D_{22}\mu_j^2+2D_{26}\mu_j,$$
$$r_j=D_{16}+D_{26}\mu_j^2+2D_{66}\mu_j,\qquad s_j=\frac{D_{11}}{\mu_j}+3D_{16}+(D_{12}+2D_{66})\mu_j+D_{26}\mu_j^2. \tag{1.4}$$

Коэффициенты k_{31}, k_{41}, k_{32}, k_{42} получаются из k_{21}, k_{11}, k_{22}, k_{12}, если в выражениях (1.3) заменить μ_1, p_1, q_1 на μ_2, p_2, q_2 и наоборот.

Функции $W_j(z_j)$ $(j=1, 2)$ определены в областях S_j, которые получаются из заданной области S путем известного аффинного преобразования.

После определения функций $W_j(z_j)$ прогиб плиты, моменты и перерезывающие силы находятся по формулам [4]

$$W=2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1,2}W_j(z_j),\qquad M_x=-2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1,2}p_jW_j''(z_j),$$
$$M_y=-2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1,2}q_jW_j''(z_j),\qquad H_{xy}=-2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1,2}r_jW_j''(z_j), \tag{1.5}$$
$$N_x=-2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1,2}\mu_js_jW_j'''(z_j),\qquad N_y=2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1,2}s_jW_j'''(z_j).$$

Для точек контуров наибольший интерес представляет определение моментов и перерезывающих сил, действующих на площадках, касательных и нормальных к контурам плиты. Они легко определяются по формулам [4]

$$M_n=M_x\cos^2(nx)+M_y\cos^2(ny)-2H_{xy}\cos(nx)\cos(ny),$$
$$H_{nt}=(M_y-M_x)\cos(nx)\cos(ny)+H_{xy}[\cos^2(nx)-\cos^2(ny)], \tag{1.6}$$
$$N_n=N_x\cos(nx)+N_y\cos(ny).$$

2. В силу геометрической и силовой симметрии главный вектор и главный момент усилий, приложенных к контуру L_1, будут равны нулю. Поэтому функции $W_j'(z_j)$ можно искать в виде [6]

$$W_j(z_j) = \sum_{k=1,3,\ldots} \frac{A_{jk}}{[\xi_1(z_j)]^k} + \sum_{k=1,3,\ldots} C_{jk} P_k^{(0)}(z_j). \tag{2.1}$$

Здесь A_{jk}, C_{jk} — комплексные постоянные, подлежащие определению из граничных условий, $P_k^{(0)}(z_j)$ — полиномы Фабера для областей, заключенных внутри эллипсов L_{j0}, полученных из L_0 известным аффинным преобразованием, а $\xi_1(z_j)$ связаны с z_j неявными зависимостями вида

$$z_j = R_{j1}\left(\xi_1 + \frac{m_{j1}}{\xi_1}\right). \tag{2.2}$$

Отобразим единичный круг в плоскости ξ_0 на внешность эллипсов L_{j0}. Это отображение осуществляется, как известно, функциями

$$z_j = R_{j0}(\xi_0^{-1} + m_{j0}\xi_0). \tag{2.3}$$

Постоянные R_{jn} и m_{jn} $(n = 0, 1)$ в выражениях (2.2) и (2.3) характеризуют размеры и форму эллипсов L_{jn} в областях изменения z_j и определяются соотношениями

$$R_{jn} = \frac{a_n - i\mu_j b_n}{2}, \quad m_{jn} = \frac{1 + i\mu_j c_n}{1 - i\mu_j c_n}, \quad c_n = \frac{b_n}{a_n}. \tag{2.4}$$

Функции $[\xi_1(z_j)]^{-l}$, голоморфные вне контуров L_{j1}, а, следовательно, и вне контуров L_{j0}, можно после этого рассматривать как функции аргумента ξ_0. Они будут голоморфными в области внутри единичной окружности γ_0. Разложим внутри γ_0 функции $[\xi_1(z_j)]^{-l}$ $(l = 1, 3, 5, \cdots)$ в ряды Тейлора [7]

$$[\xi_1(z_j)]^{-l} = \sum_{k=1,3,\ldots} \alpha_{jkl}[\xi_0(z_j)]^k. \tag{2.5}$$

Коэффициенты α_{jkl} определяются из соотношения

$$\alpha_{jkl} = \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{jp1}\alpha_{j,k-p,l-1} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots). \tag{2.6}$$

При этом

$$\alpha_{jk1} = \sum_{n=1}^{\frac{k-1}{2}} \frac{(-1)^{\frac{k-2n+1}{2}} n\left(\frac{2n+k-3}{2}\right)!\, m_{j1}^{n-1} m_{j0}^{\frac{k-2n+1}{2}}}{\left(\frac{k-2n+1}{2}\right)!\,(n!)^2}\left(\frac{R_{j1}}{R_{j0}}\right)^{2n-1}$$

$$(k = 1, 3, \cdots), \tag{2.7}$$

$$\alpha_{jk1} = 0 \qquad (k = 2, 4, 6, \cdots).$$

На основании (2.3) полиномы Фабера $P_k^{(0)}(z_j)$ на контуре L_0 можно записать в виде

$$P_k^{(0)}(z_j) = \sigma^{-k} + m_{j0}^k \sigma^k \qquad (\sigma = e^{i\theta}). \tag{2.8}$$

Принимая во внимание выражение (2.8) и учитывая, что на контуре L_0 $\xi_0(z_j)=\sigma$, подставим полученные разложения (2.5) в соотношения (2.1). Тогда для функций $W_j'(z_j)$ получим следующее представление на контуре L_0:

$$W_j'(\sigma)=\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\left(\sum_{l=1,3,\ldots}^{k}\alpha_{jkl}A_{jl}\right)\sigma^{k}+\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}C_{jk}(\sigma^{-k}+m_{j0}^{k}\sigma^{k}). \tag{2.9}$$

Здесь учтено, что $\alpha_{jkl}=0$ при $l>k$, что непосредственно следует из (2.6).

Функции $P_k^{(0)}(z_j)$, голоморфные внутри эллипсов L_{j0}, будут голоморфными и в областях внутри контуров L_{j1}. Разложим их внутри эллипсов L_{j1} в ряды по полиномам Фабера $P_k^{(1)}(z_j)$ [5]. Будем иметь

$$P_s^{(0)}(z_j)=\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\alpha_{jks}'P_k^{(1)}(z_j). \tag{2.10}$$

Здесь

$$\alpha_{jks}'=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}P_s^{(0)}(z_j)\frac{d\sigma}{\sigma^{k+1}}, \tag{2.11}$$

где γ — контур единичной окружности в плоскости ξ_1. Вычисление этого интеграла сопряжено с определенными трудностями. Но в рассматриваемом случае коэффициенты α_{jks}' оказалось возможным выразить через α_{jsk}:

$$\alpha_{jks}'=\frac{s}{k}\alpha_{jsk}. \tag{2.12}$$

Заметим далее, что на основании (2.2) на контуре L_1 имеет место равенство $\xi_1(z_j)=\sigma$, а полиномы $P_k^{(1)}(z_j)$ можно представить в виде

$$P_k^{(1)}(z_j)=\sigma^{k}+m_{j1}^{k}\sigma^{-k}. \tag{2.13}$$

Учитывая это, подставим разложения (2.10) в выражение (2.1). Тогда на контуре L_1 для функций $W_j'(z_j)$ получим следующее представление:

$$W_j'(\sigma)=\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{A_{jk}}{\sigma^{k}}-\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\left(\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\alpha_{jkl}'C_{jl}\right)\left(\sigma^{k}+\frac{m_{j1}^{k}}{\sigma^{k}}\right). \tag{2.14}$$

Подставим теперь полученные выражения (2.9) и (2.14) соответственно в граничные условия (1.2) и (1.1). Одновременно учтем, что на контуре L_0 имеют место соотношения

$$x=\frac{a_0}{2}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right),\quad y=\frac{a_0c_0i}{2}\left(\sigma-\frac{1}{\sigma}\right). \tag{2.15}$$

Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях σ, для определения постоянных A_{jk}, C_{jk} и сопряженных величин получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которую после несложных, но громоздких преобразований можно привести к виду

$$A_{1k}+m_{11}^{k}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\alpha_{1kl}'C_{1l}+k_{11}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\overline{\alpha}_{1kl}'\overline{C}_{1l}+k_{21}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\overline{\alpha}_{2kl}'\overline{C}_{2l}=0,$$

$$A_{2k}+m_{21}^{k}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\alpha_{2kl}'C_{2l}+k_{31}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\overline{\alpha}_{1kl}'\overline{C}_{1l}+k_{41}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\overline{\alpha}_{2kl}'\overline{C}_{2l}=0,$$

$$C_{1k}+k_{12}\left(\overline{m}_{10}^{k}\overline{C}_{1k}+\sum_{l=1,3,\ldots}^{k}\overline{\alpha}_{1kl}\overline{A}_{1l}\right)+k_{22}\left(\overline{m}_{20}^{k}\overline{C}_{2k}+\sum_{l=1,3,\ldots}^{k}\overline{\alpha}_{2kl}\overline{A}_{2l}\right)=\delta_{1k0},$$

$$C_{2k}+k_{32}\left(\overline{m}_{10}^{k}\overline{C}_{1k}+\sum_{l=1,3,\ldots}^{k}\overline{\alpha}_{1kl}\overline{A}_{1l}\right)+k_{42}\left(\overline{m}_{20}^{k}\overline{C}_{2k}+\sum_{l=1,3,\ldots}^{k}\overline{\alpha}_{2kl}\overline{A}_{2l}\right)=\delta_{2k0},$$

$$\overline{A}_{1k}+\overline{m}_{11}^{k}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\overline{\alpha}_{1kl}'\overline{C}_{1l}+\overline{k}_{11}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\alpha_{1kl}'C_{1l}+\overline{k}_{21}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\alpha_{2kl}'C_{2l}=0,$$

$$\overline{A}_{2k}+\overline{m}_{21}^{k}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\overline{\alpha}_{2kl}'\overline{C}_{2l}+\overline{k}_{31}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\alpha_{1kl}'C_{1l}+\overline{k}_{41}\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty}\alpha_{2kl}'C_{2l}=0, \tag{2.16}$$

$$\overline{C}_{1k}+\overline{k}_{12}\left(m_{10}^{k}C_{1k}+\sum_{l=1,3,\ldots}^{k}\alpha_{1kl}A_{1l}\right)+\overline{k}_{22}\left(m_{20}^{k}C_{2k}+\sum_{l=1,3,\ldots}^{k}\alpha_{2kl}A_{2l}\right)=$$
$$=\overline{\delta}_{1k0},$$

$$\overline{C}_{2k}+\overline{k}_{32}\left(m_{10}^{k}C_{1k}+\sum_{l=1,3,\ldots}^{k}\alpha_{1kl}A_{1l}\right)+\overline{k}_{42}\left(m_{20}^{k}C_{2k}+\sum_{l=1,3,\ldots}^{k}\alpha_{2kl}A_{2l}\right)=$$
$$=\overline{\delta}_{2k0}\quad(k=1,3,\ldots),$$

где

$$\delta_{110}=-\frac{\mu_1 dma_0}{2}(p_2-\mu_2 q_2 c_0 i),\quad \delta_{210}=\frac{\mu_2 dma_0}{2}(p_1-\mu_1 q_1 c_0 i),$$
$$\delta_{1k0}=\delta_{2k0}=0\qquad(k\geq 3). \tag{2.17}$$

Эта система оказывается квазирегулярной при любой близости между собой контуров L_0 и L_1.

3. Для доказательства квазирегулярности системы (2.16) достаточно установить, что сумма взятых по абсолютной величине коэффициентов при неизвестных A_{jl} и C_{jl} стремится к нулю, когда k стремится к бесконечности [3].

Рассмотрим разложения (2.5). Для коэффициентов α_{jkl} имеют место неравенства [7]

$$|\alpha_{jkl}|<\frac{M_j^l}{\rho^k}. \tag{3.1}$$

Здесь M_j^l — максимальные значения функций $[\xi_1(z_j)]^{-l}$ на контурах эллипсов L'_{j0}, софокусных с эллиптическими контурами L_{j0} и целиком лежащих в областях S_j. Эти контуры соответствуют окружности радиуса $\rho > 1$ в плоскости ξ_0, когда осуществляется конформное отображение области $|\xi_0| < 1$ на внешность эллипсов L_{j0}. Величины M_j^l всегда меньше единицы, так как величины $|[\xi_1(z_j)]^{-l}|$ равны единице лишь на контурах L_{j1} и убывают до нуля при удалении от этих контуров.

Для сумм абсолютных значений коэффициентов при неизвестных A_{jl} в системе (2.16) будем иметь следующие неравенства:

$$\sum_{l=1,3,\ldots}^{\infty} |\alpha_{jkl}| < \frac{M_j^*}{\rho^k}. \tag{3.2}$$

Здесь обозначено

$$M_j^* = \sum_{l=1,3,\ldots}^{\infty} M_j^l. \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь разложения (2.10). Для коэффициентов α'_{jkl} имеют место следующие неравенства [8]:

$$|\alpha'_{jkl}| < \frac{M_{jl}}{\rho_1^k}. \tag{3.4}$$

Здесь M_{jl} — максимальные значения функций $P_l^{(0)}(z_j)$ на контурах эллипсов L'_{j1}, софокусных с контурами L_{j1} и целиком лежащих в областях S_j. Контуры эллипсов L'_{j1} соответствуют окружности радиуса $\rho_1 > 1$ в плоскости ξ_1 при конформном отображении внешности единичного круга в плоскости ξ_1 на внешность эллипсов L_{j1}. Проведем эллипсы L''_{j0}, софокусные с L_{j0}, так, чтобы они касались эллиптических кривых L'_{j1}, не пересекая их. Тогда в качестве M_{jl} возьмем значения функций $P_l^{(0)}(z_j)$ на контурах L''_{j0}. Последние переходят в окружность радиуса $r < 1$ в плоскости ξ при конформном отображении области $|\xi| > 1$ на внешность эллипсов L_{j0}. Поэтому можно принять [8]

$$M_{jl} = 2r^l \qquad (r < 1). \tag{3.5}$$

Рассмотрим следующие суммы:

$$\sum_{l=1,3,\ldots} |\alpha'_{jkl}| < \frac{M_j^{**}}{\rho_1^k}. \tag{3.6}$$

Здесь

$$M_j^{**} = \sum_{l=1,3,\ldots}^{\infty} M_{jl} = 2 \sum_{l=1,3,\ldots}^{\infty} r^l. \tag{3.7}$$

Величины (3.3) и (3.7) являются ограниченными, что устанавливается на основании признака Даламбера. Поэтому величины (3.2) и

(3.6) стремятся к нулю, когда k стремится к бесконечности. Число таких сумм при искомых коэффициентах A_{jl} и C_{jl} конечное. Если, кроме того, принять во внимание формулы (9.17) и учесть, что $|m_{jn}| < 1$, то становится ясным, что система (2.16) является квазирегулярной при любой близости между собой контуров L_0 и L_1.

Это обстоятельство позволяет при приближенном решении задачи использовать метод редукции [2].

4. В качестве примера рассмотрим плиту, изготовленную из ортотропного материала так, что главные направления упругости параллельны направлениям главных осей эллипсов L_1 и L_0. Чтобы выявить влияние анизотропии материала на различные характеристики напряженно-деформированного состояния плиты, численные расчеты для прогиба, моментов и перерезывающих сил в точках действительной и мнимой осей и в точках контуров мы провели для случаев, когда плита изготовлена

1) из трехслойной авиационной фанеры (такую плиту в дальнейшем для краткости будем называть „фанерной"). Для фанеры отношение модулей Юнга для главных направлений упругости равно [4] $E_1/E_2 = 12{,}1$, в то время как для изотропного материала $E_1/E_2 = 1$;

2) из СВАМ'а, для которого $E_1/E_2 = 1{,}01$ [1].

Жесткости, коэффициенты Пуассона и комплексные параметры изгиба для этих материалов приведены в табл. 1. Все расчеты были проведены на ЭЦВМ „Урал-2". О сходимости результатов, а также о степени удовлетворения граничных условий в отдельных точках для фанерной плиты можно судить на основании табл. 2. В этой таблице приведены с точностью до m по приближениям значения прогиба, изгибающего момента M_r и перерезывающей силы N_r в наиболее интересных точках (см. фиг. 1). При этом принято, что контуры L_0 и L_1 являются эллиптическими с отношением полуосей $a_0/a_1 = 5$, $b_0/b_1 = 2$. Через n в таблице обозначено количество уравнений, которое оставлялось в системе (2.16) при приближенном решении задачи.

Таблица 1

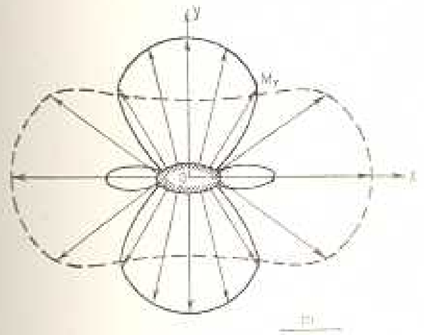
	$D_1\frac{12\cdot10^{-5}}{h^3}$	$D_2\frac{12\cdot10^{-5}}{h^3}$	$D_3\frac{12\cdot10^{-5}}{h^3}$	$D_k\frac{12\cdot10^{-5}}{h^3}$	ν_1	ν_2	μ_1	μ_2
Фанера	1,70	0,14	0,183	0,07	0,31	0,026	$1{,}04+1{,}55i$	$-1{,}04+1{,}55i$
СВАМ	3,52	3,49	2,14	0,84	0,13	0,13	$0{,}442-0{,}899i$	$-0{,}442-0{,}899i$

Для плиты, изготовленной из СВАМ'а, как показали проведенные нами исследования, практически точные результаты получались уже в том случае, когда в системе (2.16) оставлялось 12 уравнений.

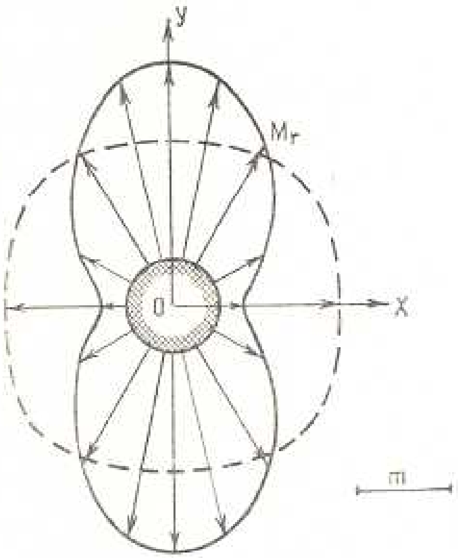
Таблица 2

	Точки \ n	4	8	12	16	20
D_1W	F	−7,2086	−6,8068	−6,7784	−6,7915	−6,7885
	F'	−18,025	−17,538	−17,531	−17,553	−17,558
M_r	A	−0,9643	−0,8968	−0,8933	−0,8942	−0,8949
	A'	2,1286	2,0576	2,0505	2,0487	2,0484
	F	1,1630	0,9279	0,9922	1,0135	0,9965
	F'	0,9942	0,9743	0,9890	0,9993	1,0010
N_r	A	8,9413	8,7780	8,7777	8,7829	8,7856
	A'	−1,8734	−1,7056	−1,6778	−1,6677	−1,6656
	F	−0,0026	−0,0571	−0,0241	−0,0154	−0,0177
	F'	−0,0655	−0,0421	−0,0161	−0,0154	−0,0224

Для указанных выше отношений полуосей в табл. 3 приведены в 5-м приближении (т. е. при $n = 20$) с точностью до m значения прогиба, моментов и перерезывающих сил в точках действительной и мнимой осей, а в табл. 4 — прогиб, моменты и перерезывающие силы в точках внутреннего контура (верхняя половина таблицы) и внешнего (нижняя половина). В точках дей-



Фиг. 2.



Фиг. 3.

ствительной и мнимой осей скручивающий момент H_{xy} равен нулю, поэтому он в таблицах не приведен.

Распределение изгибающего момента M_r по контуру L_1 в случае, когда оба контура являются эллиптическими ($a_0/a_1 = 5$, $b_0/b_1 = 2$), дано на фиг. 2. Для сравнения на фиг. 3 показано распределение изгибающего момента M_r по контуру кругового ядра в круглой плите ($R_0/R_1 = 2$). Сплошная линия графиков, изображенных на фиг. 2, 3,

Таблица 3

Точка	D_1W		M_x		M_y		N_x		N_y	
	Фанера	СВАМ	Фанера	СВАМ	Фанера	СВАМ	Фанера	СВАМ	Фанера	СВАМ
A	0	0	−0,8949	2,5268	−0,0233	0,3272	8,7856	−2,2266	0	0
B	−0,1378	−0,4891	1,3022	1,1019	0,5614	1,0339	0,5307	−0,2416	0	0
C	−0,9387	−1,6443	1,2118	1,0153	0,7868	1,0190	0,0239	−0,0430	0	0
D	−2,3644	−3,3768	1,1155	1,0008	0,8800	1,0100	−0,0110	−0,0100	0	0
E	−4,3328	−5,6756	1,0489	0,9999	0,9353	1,0052	−0,0126	0,0001	0	0
F	−6,7885	−8,5400	0,9965	1,0021	0,9746	0,9923	−0,0177	−0,0213	0	0
A'	0	0	0,6467	0,1296	2,0484	0,9917	0	0	−1,6656	0,9001
B'	−0,9580	−0,0471	1,8866	0,3179	1,3470	1,1148	0	0	−1,3367	0,4767
C'	−3,3964	−0,1925	1,7157	0,4843	1,1134	1,1269	0	0	−0,4485	0,1706
D'	−7,0254	−0,4360	1,5766	0,5990	1,0374	1,0957	0	0	−0,1719	0,0257
E'	−11,756	−0,7734	1,5030	0,6741	1,0094	1,0532	0	0	−0,0662	−0,0390
F'	−17,558	−1,2000	1,4559	0,7268	1,0010	1,0074	0	0	−0,0224	−0,0735

Таблица 4

$\theta°$	D_1W Фанера	D_1W СВАМ	M_r Фанера	M_r СВАМ	M_θ Фанера	M_θ СВАМ	$H_{r\theta}$ Фанера	$H_{r\theta}$ СВАМ	N_r Фанера	N_r СВАМ	N_θ Фанера	N_θ СВАМ
0	0	0	−0,8950	2,5268	−0,0233	0,3272	0	0	8,7856	−2,2266	0	0
15	0	0	−0,2154	2,1753	−0,0588	0,6857	0,0971	−0,2303	7,7310	−3,7966	−1,7722	1,8954
30	0	0	0,8330	1,6318	0,7520	0,6485	−0,6208	0,0514	3,4344	−0,7531	7,1208	−4,8438
45	0	0	1,5013	1,2827	1,9389	0,3748	−0,9388	0,1351	−2,7895	0,9859	13,296	−2,4057
60	0	0	1,8454	1,1009	1,7645	0,2170	−0,4977	0,1016	−3,8102	1,0767	−0,0010	−0,8141
75	0	0	2,0031	1,0163	0,9830	0,1486	−0,1302	0,0507	−2,2907	0,9527	−3,0283	−0,2570
90	0	0	2,0484	0,9917	0,6467	0,1296	0	0	−1,6656	0,9001	0	0
0	−6,7885	−8,5400	0,9965	1,0021	0,9746	0,9923	0	0	−0,0177	−0,0213	0	0
15	−7,7718	−8,0020	1,0022	0,9968	0,9524	1,0073	0,0027	0,0031	0,0035	0,0073	0,0032	0,0238
30	−10,323	−6,5520	0,9990	1,0045	0,8891	1,0001	−0,0045	0,0011	0,0260	0,0011	−0,0012	−0,0058
45	−13,374	−4,6262	0,9996	0,9946	0,8720	1,0034	−0,0427	0,0016	0,0467	−0,0039	0,0541	−0,0125
60	−15,756	−2,8165	1,0005	1,0002	1,0922	0,9480	−0,0724	−0,0042	0,0008	0,0235	0,1694	−0,0654
75	−17,105	−1,6105	0,9991	0,9931	1,3792	0,8078	−0,0396	−0,0452	−0,0401	0,0193	0,1238	−0,1091
90	−17,558	−1,2000	1,0010	1,0074	1,4559	0,7268	0	0	−0,0224	−0,0735	0	0

соответствует фанерной плите, а пунктирная—плите, изготовленной из СВАМ'а.

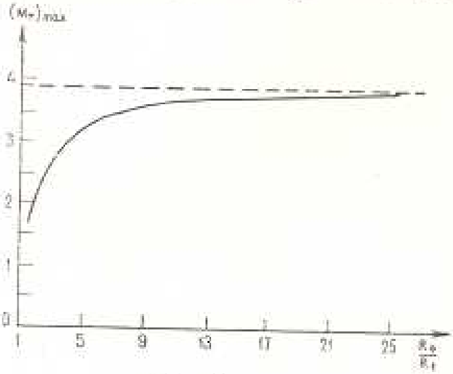
На основании полученных результатов можно заключить, что анизотропия материала оказывает существенное влияние как на характер распределения, так и на величину всех характеристик напряженно-деформированного состояния плиты.

Для выяснения взаимного расположения контуров плиты на ее напряженное состояние нами были проведены просчеты для прогибов, моментов и перерезывающих сил при различных отношениях радиуса круглой фанерной плиты к радиусу круглого ядра. На фиг. 4 представлено изменение максимального изгибающего момента M_r, который получается в точке A' (см. фиг. 1), в зависимости от отношения R_0/R_1. Пунктиром на рисунке показана величина этого момента для случая, когда плита считается теоретически бесконечной [4]. На основании этого графика можно заключить, что погрешность приближенного (т. е. когда плита считается „бесконечной") определения максимального изгибающего момента M_r равна

$$20{,}4\% \quad \text{при} \quad R_0/R_1 = 5,$$

$$6{,}4\% \quad \text{при} \quad R_0/R_1 = 10,$$

$$3{,}8\% \quad \text{при} \quad R_0/R_1 = 20.$$



Фиг. 4.

Таким образом, при определении максимального изгибающего момента практически можно считать плиту „бесконечной" при $R_0/R_1 \geqslant 10$. Для меньших отношений радиуса плиты к радиусу отверстия это решение дает для максимального изгибающего момента M_r завышенные значения.

Саратовский государственный университет

Поступила 28 VI 1965

Վ. Վ. ՄԵԳԼԻՆՍԿԻ

ԷԼԻՊՍԱԿԱՆ ԱՆՑՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԷԼԻՊՍԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Տրված է էլիպսական անցք ունեցող անիզոտրոպ էլիպսական սալի ծռման խնդրի լուծումը, երբ սալի ներքին եզրը կոշտ ամրակցված է, իսկ արտաքին եզրում ազդում են հավասարաչափ բաշխված ծռող մոմենտներ։ Խնդրի լուծումը բերված է գծային հանրահաշվական հավասարումների ան-

վերջ սիստեմի լուծման: Ցույց է տրված, որ սալի միջին հարթությունը սահմանափակող եզրերի ցանկացած մոտիկության դեպքում այդ սիստեմը հանդիսանում է քվազիռեգուլյար:

Բերված են աղյուսակներ և կառուցված գրաֆիկներ, որոնք բնութագրում են սալի լարված-դեֆորմացիոն վիճակը՝ կախված նյութի անիզոտրոպիայից: Պարզաբանված է, թե սալի ինչպիսի չափերի դեպքում այն կարելի է համարել «անվերջ»:

V. V. MEGLINSKY

BENDING OF AN ANISOTROPIC ELLIPTIC PLATE WITH AN ELLIPTIC HOLE

Summary

The solution is given of the problem of the bending of an elliptic plate with an elliptic hole under actions of bending moments, uniformly distributed on external contour of the plate. The inner contour is rigidly pinched.

The solution of the problem is reduced to the solution of infinite system of linear algebraic equations. This system is shown to be quasi-regular at any nearing between contours, limiting the middle plane of the plate.

Tables and diagrams are presented, characterizing the stressed-deformed state of the plate according to the material anisotropy. It is found out at what plate sizes the latter may be considered to be „infinite".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буров А. К., Андреевская Г. Д.* Стекловолокнистые анизотропные материалы и их техническое применение. Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.-Л., 1959.
3. *Космодамианский А. С.* О квазирегулярности бесконечных систем в задаче о концентрации напряжений возле криволинейных отверстий. Прикл. механика, т. 1, в. 1, 1965.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
5. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Гостехиздат, 1950.
6. *Меглинский В. В.* Изгиб анизотропной эллиптической плиты, ослабленной эллиптическими отверстиями. Прикл. механика, т. 1, в. 4, 1965.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. I. Физматгиз, М., 1961.
8. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. Изд-во „Наука", М.—Л., 1964.