ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 2, 1966 Механика

Ю. К. ЗАРЕЦКИЙ

ПОЛЗУЧЕСТЬ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ИЗ ДВУХФАЗНОГО ГРУНТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ НОРМАЛЬНО К ГРАНИЦЕ

§ 1. Общая постановка и основные уравнения

Под „двухфазной грунтовой системой" подразумевается среда с непрерывно распределенными свойствами. В каждом элементарном объеме ее содержатся два материала (две фазы), по-разному сопротивляющиеся механическим воздействиям. В процессе деформирования предполагаются возможные изменения количественного соотношения этих фаз.

Минеральная часть грунтовой системы и прочносвязанная с ней вода составляют *первую* фазу. Под *второй* фазой понимается гидравлически непрерывная сжимаемая жидкость, полностью заполняющая поры, образуемые между минеральными частицами грунта.

Относительно механических свойств фаз и их взаимодействия сделаем следующие три предположения.

1. Примем, что материал первой фазы грунта подчиняется закономерностям *линейной наследственной* теории ползучести [1, 2].

Параметры уравнения состояния определяются из испытаний грунта в условиях, когда заполняющая поры жидкость не препятствует деформированию (работает лишь „грунтовый скелет"). Многочисленные экспериментальные работы в этой части были проведены С. Р. Месчяном [3].

2. Примем, что сжимаемая жидкость, заполняющая поры, подчиняется следующей линейной зависимости*:

$$\varepsilon_{kk} = -\frac{3}{\alpha_w} p, \tag{1.1}$$

где α_w — модуль объемной сжимаемости поровой жидкости и
ε_{kk} — объемная деформация.

3. Наконец, в качестве третьей основной закономерности, характеризующей взаимодействие фаз грунта, должна быть выбрана зависимость, определяющая изменение соотношения фаз в единице объема грунта при воздействии на него внешней нагрузки.

---

* Здесь и в дальнейшем будет использована тензорная символика $a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$; $a_{i,j} = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_j}$; $a_{k,k} = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3}$ и т. п.

Уравнение неразрывности движения жидкости в пористой среде и закон Дарси для ламинарной фильтрации при отсутствии массовых сил позволяют записать следующее [4]:

$$\rho_w^{(\text{ср})} \frac{\partial m}{\partial t} + m^{(\text{ср})} \frac{d\rho_w}{dp} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \rho_w^{(\text{ср})} [kp_{,i}]_{,i}. \tag{1.2}$$

Здесь m — пористость грунтовой массы; k — коэффициент, равный отношению проницаемости пористой среды к динамической вязкости внутрипоровой жидкости; $m^{(\text{ср})}$, $\rho_w^{(\text{ср})}$ — средние величины пористости и плотности воды в рассматриваемом диапазоне уплотнения.

Если строго придерживаться условия, что поры грунта полностью заполнены водой $\left(\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t}\right)$, то соотношение (1.2) можно привести к виду

$$\dot{u}_{k,k} + \frac{3m^{(\text{ср})}}{\alpha_w} \dot{p} = [kp_{,i}]_{,i}. \tag{1.3}$$

Здесь u_i — компонента смещения по направлению x_i.

В момент приложения нагрузки пористость грунта успевает измениться только за счет сжимаемости воды и поэтому

$$u_{k,k}^{(0)} = -\frac{3}{\alpha_w} p^{(0)}, \tag{1.4}$$

где $u_{k,k}^{(0)}$ — начальное значение объемной деформации, а

$p^{(0)}$ — величина давления в поровой жидкости при $t = 0$.

Приведем далее краткий вывод основных уравнений теории ползучести двухфазных грунтов.

Под *напряжениями* (σ_{ij}) двухфазной среды будем понимать *суммарные* внутренние силы, действующие на произвольную элементарную площадку. Под *деформациями* (ε_{ij}) также будем понимать суммарную деформацию грунтовой массы.

Тензор общей деформации грунтовой системы $[\varepsilon_{ij}]$ равен сумме тензора деформации $[\varepsilon_{ij}^{(1)}]$, возникающей в первой компоненте грунтовой системы (грунтовом „скелете") в предположении, что поровая жидкость не мешает работе „скелета", и тензора деформации $[\varepsilon_{ij}^{(2)}]$. Деформация $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ возникает в „скелете" грунта под действием внутреннего гидростатического давления в жидкости и сопровождается механическим разрушением грунтовых связей и раздвижением частиц. Таким образом, тензор деформации грунтовой системы равен

$$[\varepsilon_{ij}] = [\varepsilon_{ij}^{(1)}] + [\varepsilon_{ij}^{(2)}]. \tag{1.5}$$

В качестве упрощающего предположения примем, что заполняющая поры грунта жидкость не сопротивляется сдвиговым деформациям. Поэтому, естественно считать, что и деформация „скелета", вызванная внутренним гидростатическим давлением жидкости, представляет собой объемную деформацию, а тензор $[\varepsilon_{ij}^{(2)}]$ является шаровым. Тогда равенство (6.17) в компонентах запишется

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}\varepsilon_{ij}^{(2)}; \quad \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{kk}^{(1)} + 3\varepsilon^{(2)}, \tag{1.6}$$

где δ_{ij} — символ Кронеккера, а $\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{33}^{(2)}$. При этом, если $\varepsilon_{kk}^{(1)}$ представляет собой деформацию объема системы за счет *уплотнения* „скелета" под действием внешних сжимающих напряжений, то $\varepsilon_{kk}^{(2)}$ представляет деформацию объема системы за счет *разуплотнения*„ скелета" грунта под воздействием гидростатического давления в жидкости.

Далее введем *следующую гипотезу*.

Компоненты тензора напряжений $[\sigma_{ij}]$ в грунтовой системе связаны с компонентами тензора деформаций „скелета" $[\varepsilon_{ij}^{(1)}]$ линейными соотношениями

$$\sigma_{ij}(t) = 2\widetilde{\mu}\varepsilon_{ij}^{(1)}(t) + \delta_{ij}\frac{1}{3}[\widetilde{\alpha}\varepsilon_{kk}^{(1)}(t) - 2\widetilde{\mu}\varepsilon_{kk}^{(1)}(t)]. \tag{1.7}$$

Здесь $\widetilde{\mu} \equiv \widetilde{G}$ и $\widetilde{\alpha}$ — линейные интегральные операторы вида:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\mu}y(t) &= \mu_0\left[y(t) - \int_0^t K_D(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau\right] \\ \widetilde{\alpha}y(t) &= \alpha_0\left[y(t) - \int_0^t K_0(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau\right] \end{aligned}\right\}. \tag{1.8}$$

Обратные операторы $\widetilde{\mu}^{-1}$ и $\widetilde{\alpha}^{-1}$ представляют собой выражения

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\mu}^{-1}y(t) &= \mu_0^{-1}\left[y(t) + \int_0^t Q_D(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau\right] \\ \widetilde{\alpha}^{-1}y(t) &= \alpha_0^{-1}\left[y(t) + \int_0^t Q_0(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau\right] \end{aligned}\right\}, \tag{1.8a}$$

где $Q_D(t,\tau)$ и $Q_0(t,\tau)$ — резольвенты ядер $K_D(t,\tau)$ и $K_0(t,\tau)$.

Целесообразно ввести также оператор $\widetilde{\lambda} = \dfrac{1}{3}(\widetilde{\alpha} - 2\widetilde{\mu})$. Тогда мгновенные значения операторов $\widetilde{\mu}$ и $\widetilde{\lambda}$ будут представлять собой в обычном смысле постоянные Ламе: $\mu_0 = G_0$; $\lambda_0 = \dfrac{2\nu_0 G_0}{1 - 2\nu_0}$; ν — коэффициент Пуассона.

Общие формы связи получим, подставив (1.6) в (1.7). Окончательно

$$\sigma_{ij}(t) = 2\widetilde{\mu\varepsilon_{ij}}(t) + \delta_{ij}[\widetilde{\lambda\varepsilon_{kk}}(t) - \widetilde{\alpha\varepsilon^{(2)}}(t)]. \tag{1.9}$$

Простейшее предположение состоит в том, что мы будем считать величину $\alpha\varepsilon^{(2)}$ линейно зависящей от порового давления p так, что $\alpha\varepsilon^{(2)} = \beta p$. Тогда $\widetilde{\alpha\varepsilon^{(2)}}(t) = \widetilde{\beta}p(t)$, где

$$\widetilde{\beta}y(t) = \beta_0\left[y(t) - \int_0^t K_0(t, \tau)\,y(\tau)\,d\tau\right].$$

Соотношения (1.9) перепишутся в виде

$$\sigma_{ij}(t) = 2\widetilde{\mu\varepsilon_{ij}}(t) + \delta_{ij}[\widetilde{\lambda\varepsilon_{kk}}(t) - \widetilde{\beta}p(t)]. \tag{1.9a}$$

Уравнения движения двухфазной среды в перемещениях получим, учитывая, что $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$ и $\varepsilon_{kk} = u_{kk}$.

Пренебрегая ускорениями частиц при рассмотрении вопросов статики грунтовых систем и для простоты считая массовые силы равными нулю, уравнения равновесия запишем в форме:

$$\widetilde{\mu}\Delta^2 u_i(t) + (\widetilde{\mu} + \widetilde{\lambda})\,u_{k,ki}(t) = \widetilde{\beta}p_{,i}(t). \tag{1.10}$$

К уравнениям равновесия (1.10) следует присоединить граничные условия либо в смещениях, либо в напряжениях, либо смешанные.

Кроме того, следует учесть граничные условия для напоров, обычно применяемые в теории движения жидкостей через пористые среды: а) на *водонепроницаемых* участках границы $\dfrac{\partial p}{\partial n} = 0$, где n — нормаль к поверхности; б) на *водопроницаемых* участках границы поровое давление принимает заданное значение $p = p\big|_{\Sigma}$.

Нетрудно заметить, что система из трех уравнений равновесия в смещениях (1.10) содержит четыре неизвестные функции u_i и p. Для полного решения поставленной проблемы необходимо составить четвертое уравнение. Соотношение (1.3), описывающее движение жидкости в деформируемой пористой среде и будет этим четвертым недостающим уравнением. Замкнутая система из четырех дифференциальных уравнений полностью характеризует работу двухкомпонентных грунтов под нагрузкой. Как следует из приведенных уравнений, *общее напряженно-деформированное* состояние грунтовой двухфазной системы должно *изменяться* от состояния при $t = 0$ до установившегося состояния, в противоположность распространенной в настоящее время в механике грунтов концепции о постоянстве суммарных напряжений во времени и равенстве их „стабилизованному" состоянию [5].

Основная система уравнений получена в предположении, что в „скелете грунта" возникает *разуплотняющий эффект*, вызванный давлениями в поровой жидкости. Вследствие этого в грунте появляются дополнительные напряжения, которые влияют на всю картину изменения напряженно-деформированного состояния. По-видимому, впервые идея учета взаимодействия между двумя фазами грунтовой массы в виде объемных сил, обусловливаемых воздействием давления поровой жидкости на „скелет грунта", была предложена еще в 1938 г. В. А. Флориным [6]. Позднее, независимо от него, эта идея была развита в работе Био [7]. В настоящее время уравнения консолидации с учетом объемных сил, вызванных гидродинамическим эффектом, используются для решения отдельных задач [8, 9].

Решение системы (1.3) и (1.10) представим в виде суммы мгновенного и временного состояний:

$$u_i = (1 + \widetilde{Q}_0)\, u_i^{(0)} + u_i^{(t)}; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(t)}, \tag{1.11}$$

где $u_i^{(0)}$ — поле мгновенных смещений грунтовой массы.

Тогда естественно положить

$$(\sigma_{ij}^{(t)})\,|_{\Sigma} \cdot n_j = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{ij}^{(t)} = 0; \quad u_i^{(t)} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{1.12}$$

Из анализа уравнений следует, что *мгновенное напряженное состояние двухкомпонентной грунтовой системы совпадает с напряженным состоянием некоторой фиктивной линейно-деформируемой среды с аналогичными граничными условиями и механическими характеристиками, равными:* $\mu^{(\phi)} = \mu = G$; $\alpha^{(\phi)} = \left(\frac{\beta \alpha_w}{m^{cp}} + \alpha\right)$. *Начальное* же значение *порового давления* $p^{(0)}$ равно значению *среднего напряжения в фиктивной задаче*, уменьшенному в $\left(\beta + m^{cp} \frac{\alpha}{\alpha_w}\right)$-раз

$$p^{(0)} = -\frac{\sigma_{kk}^{(\phi)}}{3\left[\beta + m^{cp} \dfrac{\alpha}{\alpha_w}\right]}. \tag{1.13}$$

Нахождение мгновенного напряженного состояния линейно-деформируемой среды с механическими характеристиками $\mu^{(\phi)}$ и $\alpha^{(\phi)}$ представляет самостоятельную задачу теории упругости.

Введем для удобства функцию порового давления $P(t)$ вида:

$$P(t) = p(t) - \int_0^t K_0(t, \tau)\, p(\tau)\, d\tau. \tag{1.14}$$

Функция $P(t)$ определится непосредственно из совместного рассмотрения системы уравнений (1.3) и (1.10).

Для определения $\sigma_{ij}^{(t)}$ и $u_{ij}^{(t)}$ представим компоненты временных смещений и напряжений в форме:

$$u_i^{(t)}(t) = \Phi_{,i}(t) + \widetilde{\varepsilon}_{ij}\, \varphi_i(t),$$

$$\sigma_{ij}^{(t)} = [\widetilde{\lambda}\delta_{ij}\Delta^2 - 2(\widetilde{\lambda} + \widetilde{\mu})\, \partial_i \partial_j]\, \varphi_{k,k} + (\widetilde{\lambda} + 2\widetilde{\mu})\, \Delta^2 (\varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}) +$$

$$+ \widetilde{\mu}(\Phi_{,ij} - \delta_{ij}\Delta^2 \Phi) \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1.15}$$

Здесь функции φ_i — бигармонические ($\Delta^4\varphi_i = 0$), а $\widetilde{\alpha}_{ij}$ — интегродифференциальный оператор вида

$$\widetilde{\alpha}_{ij} = \left[\frac{2\widetilde{\mu} + \widetilde{\lambda}}{\widetilde{\mu}}\delta_{ij}\Delta^2 - \frac{\widetilde{\mu} + \widetilde{\lambda}}{\widetilde{\mu}}\partial_i\partial_j\right]. \qquad (1.16)$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$\lim_{t\to 0}\Phi(t) = 0, \qquad \lim_{t\to 0}\varphi_i(t) = 0. \qquad (1.17)$$

Рассмотрим подробнее простейший случай, когда $K_D(t^*, \tau) = K_0(t, \tau) \equiv K(t-\tau)$ и $\alpha_w \to \infty$. При этих предположениях функция порового давления находится из решения уравнения

$$c\Delta^2 P = \frac{\partial P}{\partial t}; \qquad c = \frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{k\alpha}{\beta}, \qquad (1.18)$$

а поровое давление равно

$$p(t) = P(t) + \int_0^t Q(t-\tau)P(\tau)\,d\tau. \qquad (1.19)$$

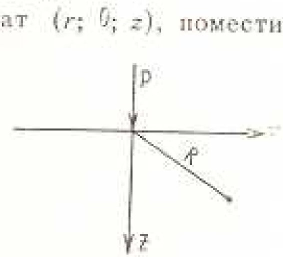
Нетрудно также видеть, что

$$\widetilde{\mu}\Phi(t) = \mu_0 k\int_0^t P(\tau)\,d\tau. \qquad (1.20)$$

§ 2. Полупространство под действием сосредоточенной силы

Для получения замкнутого решения и обозрения результата этой важнейшей задачи механики грунтов примем простейшие предположения относительно свойств основания. Будем считать, что внутрипоровая жидкость несжимаема ($\alpha_w \to \infty$), а ползучесть „скелета" характеризуется ядрами $K_D(t-\tau) = K_0(t-\tau) \equiv K(t-\tau)$. Резольвенту этого ядра, по-прежнему, будем обозначать $Q(t-\tau)$.

Введем цилиндрическую систему координат $(r; \theta; z)$, поместив начало координат в точке приложения сосредоточенной силы P и направив ось z внутрь полупространства (фиг. 1).



Фиг. 1. Схема к расчету напряженного состояния полупространства при действии на его границе сосредоточенной вертикальной силы P.

Составляющие тензора напряжения в упругой задаче определяются [10]:

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2\pi R^2}\left[\frac{1-2\nu}{R+z}R - \frac{3r^2z}{R^3}\right],$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3P}{2\pi R^2}\cdot\frac{rz^2}{R^3},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{P(1-2\nu)}{2\pi R^2}\left(\frac{R}{R+z} - \frac{z}{R}\right), \qquad (2.1)$$

где $R^2 = r^2 + z^2$, $\qquad \sigma_{zz} = -\frac{3P}{2\pi R^2}\cdot\frac{z^3}{R^3}.$

Выражения же для перемещений можно представить в следующем виде:

$$u_r = -\frac{Pr}{4\pi GR^2}\left[\frac{(1-2\nu)R}{R+z} - \frac{z}{R}\right],$$
$$u_z = \frac{P}{4\pi GR^2}\left[2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2}\right]. \qquad (2.2)$$

Из соотношений (2.1), полагая $\nu = \nu^{(\phi)} = 0{,}5$, легко найдем значение порового давления в грунте в начальный момент времени $t = 0$:

$$p^{(0)} = -\frac{\sigma_{kk}^{(0)}}{3\beta} = \frac{P}{2\pi\beta}\cdot\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}. \qquad (2.3)$$

Определение давлений в поровой жидкости. Функция давлений $P(r, z, t)$ находится из решения уравнения (1.18) при начальном условии $P(r, z, 0) = p^{(0)}$ и граничном $P(r, 0, t) = 0$. Используя метод функции Грина, найдем

$$P(r, z, t) = \frac{P}{4\pi^3\beta}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{z'}{(r'^2+z'^2)^{3/2}}\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-c(\lambda^2+\gamma^2)t} J_0(\lambda u)\times\right.$$
$$\left.\times[\cos\gamma(z-z') - \cos\gamma(z+z')]\lambda\, d\lambda\, d\gamma\right\} r'dr'd\theta'dz', \qquad (2.4)$$

где $u^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta')$.

Выражение (2.4) вычисляется достаточно просто. Действительно, изменив порядок интегрирования (что в данном случае возможно сделать), вычислим последовательно

1. $$\int_{-\pi}^{\pi} J_0\left(\lambda\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta-\theta')}\right) d\theta' = 2\pi J_0(\lambda r)\, J_0(\lambda r'), \qquad (2.5)$$

2. $$\int_0^\infty J_0(\lambda r')\frac{r'dr'}{(r'^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{\lambda^{1/2}\sqrt{z'}}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} K_{-1/2}(\lambda z') = \frac{e^{-\lambda z'}}{z'}.$$

Здесь $K_\nu(x)$ — функция Макдональда.

И далее

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z'}}{z'}[\cos\gamma(z-z') - \cos\gamma(z+z')]\, z'dz' = \frac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}\sin\gamma z. \qquad (2.6)$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4), получим

$$P(r, z, t) = \frac{P}{\pi^2\beta}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{e^{-(\lambda^2+\gamma^2)ct}\lambda J_0(\lambda r)}{\lambda^2+\gamma^2}\gamma\sin\gamma z\right] d\lambda\, d\gamma. \qquad (2.7)$$

Продифференцируем обе части равенства (2.7) по t и вычислим правую часть полученного выражения

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{2Pc}{\beta(4\pi ct)^{3/2}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}e^{-\frac{r^2+z^2}{4ct}}. \tag{2.8}$$

Воспользовавшись далее (2.8), легко получим

$$P(r,\ z,\ t)=\frac{Pz}{2\pi\beta R^3}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right)-R\,\frac{e^{-R^2/4ct}}{\sqrt{\pi ct}}\right]-\frac{zP}{2\pi\beta R^3}+D(r,\ z), \tag{2.9}$$

где

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi;\qquad \operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x.$$

Функцию интегрирования $D(r,\ z)$ определим из условия: при $t=0$

$$P(r,\ z,\ 0)=p^{(0)}=\frac{Pz}{2\pi\beta R^3}.$$

Окончательно выражение для функции давления $P(r,\ z,\ t)$ примет вид

$$P(r,\ z,\ t)=\frac{Pz}{2\pi\beta R^3}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right)-R\,\frac{e^{-R^2/4ct}}{\sqrt{\pi ct}}\right]. \tag{2.10}$$

Результат (2.10) совершенно другим путем был получен В. Г. Коротким [11].

Теперь легко найти поровое давление по формуле (1.19).

Определение тензора напряжений. Временный тензор напряжений $(\sigma_{ij}^{(t)})$ определим, воспользовавшись формулами (1.15), (1.20) и (2.10). Бигармоническую функцию φ примем в форме

$$\varphi=(1+\tilde{Q})\left\{\int_0^\infty\left[C_1(\lambda t)+\lambda zC_2(\lambda t)\right]J_0(\lambda r)\,e^{-\lambda z}d\lambda\right\}, \tag{2.11}$$

где $\tilde{Q}y(t)=\int_0^t Q(t-\tau)\,y(\tau)d\tau.$

Произвольные функции $C_1(\lambda t)$ и $C_2(\lambda t)$ определим, исходя из условий $(\sigma_{ij}^{(t)})\big|_{z=0}=0.$

Не выписывая все громоздкие выкладки, окончательно, например, для радиальной составляющей тензора напряжения, будем иметь

$$\sigma_{rr}(t)=-\frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{r^2z}{R^5}+\frac{P}{4\pi}\cdot\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left\{\frac{z}{R}\left[\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)D_1\left(\frac{R}{\sqrt{ct}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{5r^2}{R^2}\right)D_2\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right)\right]-$$

$$-\int_0^\infty \lambda C(\lambda\sqrt{ct})\left[(2-\lambda z)J_0(\lambda r)+(2\nu-2+\lambda z)\frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r}e^{-\lambda z}\cdot d\lambda\right]\Bigg\}, \qquad (2.12)$$

где обозначено

$$D_1\left(\frac{R}{\sqrt{ct}}\right)=2\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right)+\frac{R}{\sqrt{\pi ct}}e^{-R^2/4ct}\right];$$

$$D_2\left(\frac{R}{\sqrt{ct}}\right)=\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right)+\frac{6\,ct}{R^2}\operatorname{erf}\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right)-\frac{6\sqrt{ct}}{R\sqrt{\pi}}e^{-R^2/4ct},$$

$$C(\lambda\sqrt{ct})=\operatorname{erf}(\lambda\sqrt{ct})+2\frac{\lambda\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}}-2(\lambda^2ct)\operatorname{erfc}(\lambda\sqrt{ct}). \qquad (2.13)$$

Исследование полученного решения. Полученное формально решение содержит несобственные интегралы. Покажем, что эти интегралы являются равномерно сходящимися относительно своих параметров. Действительно, интегралы типа

$$\int_0^\infty \lambda^{\mu-1}C(\lambda\sqrt{ct})\,J_\nu(\lambda r)\,e^{-\lambda z}d\lambda\left(\begin{matrix}\mu=1;\ 2;\ 3\\ \nu=0;\ 1\end{matrix}\right)$$

равномерно сходятся относительно параметра t, поскольку несобственный интеграл $\left(\int_0^\infty \lambda^{\mu-1}J_\nu(\lambda r)\,e^{-\lambda z}\,d\lambda\right)$ сходится при $\operatorname{Re}(\mu+\nu)>0$ и $R=\sqrt{r^2+z^2}>0$, а функция $C(\lambda\sqrt{ct})\leqslant L$ равномерно ограничена для всех λ и t.

Равномерная сходимость указанных интегралов по z следует из того, что функция $e^{-\lambda z}<1$ для всех λ и z, а несобственный интеграл $\left(\int_0^\infty \lambda^{\mu-1}C(\lambda\sqrt{ct})\,J_\nu(\lambda r)\,d\lambda\right)$ сходится при $r>0$.

Равномерная же сходимость по r следует из того, что функция $J_\nu(\lambda r)$ ограничена, а интеграл $\left(\int_0^\infty \lambda^{\mu-1}C(\lambda\sqrt{ct})\,e^{-\lambda z}\,d\lambda\right)$ сходится, поскольку он мажорируется при $\operatorname{Re} z>0$ и $\operatorname{Re}\mu>0$ сходящимся интегралом $\left(\int_0^\infty \lambda^{\mu-1}e^{-\lambda z}d\lambda\right)$.

Проверим теперь выполнение предельных условий

$$\lim_{t\to 0}\sigma_{ij}(t)=\sigma_{ij}^{(0)};\quad \lim_{t\to\infty}\sigma_{ij}(t)=\sigma_{ij}^{(\infty)}. \qquad (2.14)$$

Поскольку несобственные интегралы, входящие в (2.13), равномерно сходятся относительно параметра t, то это дает нам право переходить к пределу по t под знаком интеграла.

Будем иметь

$$\sigma_{rr}(0) = -\frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{r^2z}{R^5}, \tag{2.15}$$

$$\sigma_{rr}(\infty) = -\frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{r^2z}{R^5} + \frac{P}{4\pi}\cdot\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left\{\frac{z}{R^3}\left(1+\frac{3r^2}{R^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty \lambda\left[(2-\lambda z)J_0(\lambda r)+(2\nu-2+\lambda z)\frac{J_1(\lambda r)}{\lambda r}\right]e^{-\lambda z}d\lambda\right\}. \tag{2.16}$$

Формула (2.15) совпадает с начальным значением $\sigma_{rr}^{(0)}$. Для вычисления несобственного интеграла в (2.16) воспользуемся известными значениями интегралов [12].

Окончательно:

$$\sigma_{rr}(\infty) = -\frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{r^2z}{R^5} + \frac{P}{4\pi}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left\{\frac{z(R^2+5r^2)}{R^5} - 3\frac{z}{R^3} -\right.$$

$$\left.-\frac{z(r^2-2z^2)}{R^5}+\frac{2(1-\nu)(R-z)}{r^2R}\right\} = \frac{P}{2\pi R^2}\left[\frac{(1-2\nu)R}{R+z}-\frac{3r^2z}{R^3}\right]. \tag{2.16a}$$

Сравнивая (2.16) и формулы (2.1), видим, что второе из условий (2.14) выполняется тождественно для радиальной составляющей тензора напряжений. Аналогично проверяется выполнение условий (2.14) и для остальных компонентов тензора напряжений.

Определение вертикальной составляющей смещения полупространства. Вертикальную составляющую смещения полупространства при действии на его границе нормально приложенной сосредоточенной силы P представим в форме

$$u_z(t) = (1+\bar{Q})\,u_z^{(0)} + k(1+\bar{Q})\left\{\int_0^t P_{,z}(\tau)\,d\tau\right\} +$$

$$+\frac{1}{1-2\nu}\left\{2(1-\nu)\Delta^2\varphi - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi\right\}. \tag{2.17}$$

Бигармоническая функция φ, по-прежнему, дается в форме (2.11). Выполняя необходимые действия, предписанные формулой (2.17), найдем окончательное выражение для вертикальной составляющей смещения полупространства

$$u_z(t) = \frac{(1+Q)P}{4\pi GR}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right) + \frac{P}{4\pi GR}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}(1+\bar{Q})\left\{\left(1-\frac{3z^2}{R^2}\right)\times\right.$$

$$\times\left[\frac{ct}{R^2}\operatorname{erf}\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right)-\frac{\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}R}e^{-R^2/4ct}+\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right)\right]+$$

$$+\frac{z^2}{R^2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right)+\int_0^\infty(1-2\nu+\lambda z)\,C(\lambda\sqrt{ct})\,J_0(\lambda r)\,e^{-\lambda z}d\lambda\Bigg\}. \tag{2.18}$$

Теперь определим осадку основания под действием сосредоточенной силы P, т. е. рассмотрим смещения границы полупространства. Для этого в формуле (2.18) следует положить $z=0$. Отметим, что переход к пределу при $z=0$ в несобственном интеграле (2.18) возможен, поскольку он равномерно сходится относительно параметра z. Вычисляя интеграл

$$\Omega=(1-2\nu)\frac{r}{2}\int_0^\infty C(\lambda\sqrt{ct})\,J_0(\lambda r)\,d\lambda,$$

окончательно будем иметь

$$\Omega=(1-2\nu)\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{ct}}\right)+\frac{ct}{r^2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{ct}}\right)-\frac{\sqrt{ct}}{r\sqrt{\pi}}e^{-r^2/4ct}\right]. \tag{2.19}$$

Учитывая значения интеграла Ω и вводя обозначение

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{ct}}\right)=\frac{ct}{r^2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{ct}}\right)-\frac{\sqrt{ct}}{r\sqrt{\pi}}e^{-r^2/4ct}+\frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{r}{2\sqrt{ct}}\right), \tag{2.20}$$

осадку основания запишем в форме

$$u_z\big|_{z=0}=S(r,\,t)=\frac{P}{4\pi G}\cdot\frac{1}{r}\Bigg\{1+\int_0^t Q(\tau)\,d\tau+(1-2\nu)\Bigg[A\left(\frac{r}{\sqrt{ct}}\right)+$$

$$+\int_0^t Q(t-\tau)\,A\left(\frac{r}{\sqrt{c\tau}}\right)d\tau\Bigg]\Bigg\}. \tag{2.21}$$

При отсутствии у „скелета" грунта свойств ползучести $(Q(t)\equiv 0)$, осадка основания при действии на ее границе вертикально приложенной сосредоточенной силы P выразится в форме

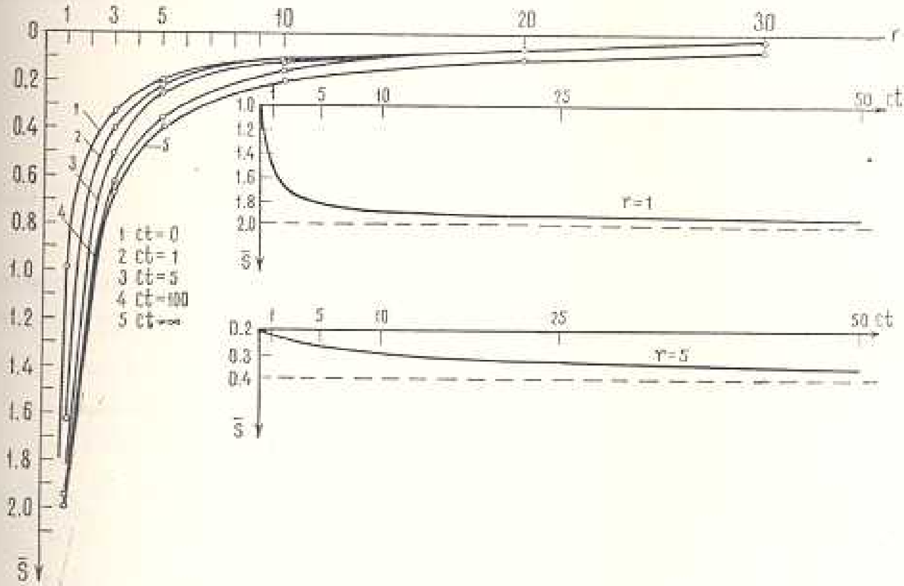
$$S(r,\,t)=\frac{P}{4\pi G}\cdot\frac{1}{r}\left[1+2(1-2\nu)\,A\left(\frac{r}{\sqrt{ct}}\right)\right]. \tag{2.22}$$

Из формулы (2.22), в частности, получим

$$S(r,\,0)=\frac{P}{4\pi G}\cdot\frac{1}{r};\qquad S(r,\,\infty)=\frac{P}{4\pi G}\,\frac{(1-\nu)}{r}, \tag{2.23}$$

что совпадает с (2.2).

На фиг. 2 приведены графики смещений поверхности полупространства, построенные в соответствии с формулой (2.22). Как видно из графиков, стабилизация осадки происходит неравномерно и зависит от расстояния до точки приложения силы P. Чем ближе к точке приложения силы, тем стабилизация осадки происходит быстрее. В полученных выше выражениях характеристики G; ν; $Q(t)$ и γ соответствуют характеристикам механических свойств „скелета грунта".



Фиг. 2. Графики приведенных смещений границы полупространства $\overline{S}(t) = \frac{S(t)}{P} 4\pi G$ при действии сосредоточенной силы P при $Q(t)=0$ и $\nu=\nu_{ck}=0$.

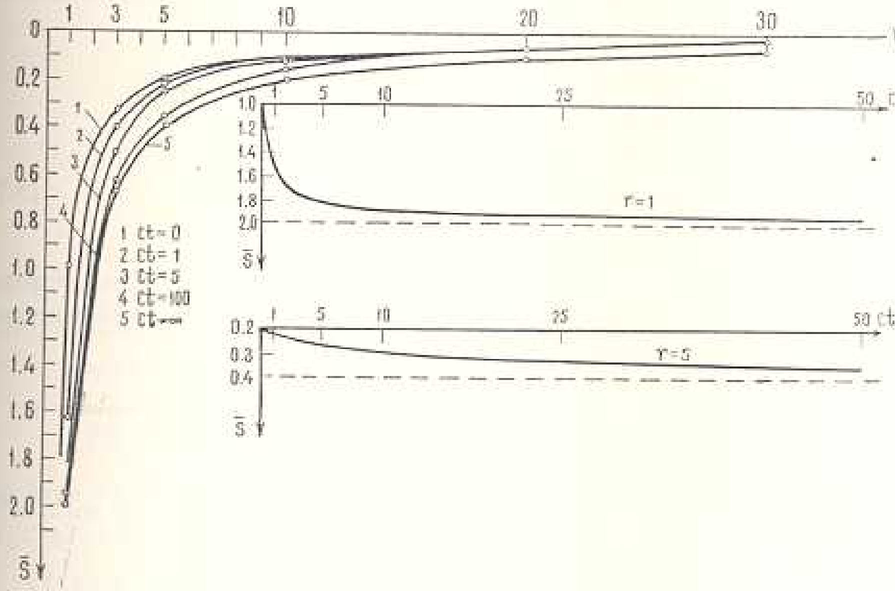
§ 3. Полупространство под действием нагрузки, распределенной по некоторой области

Пусть на плоскости, ограничивающей полупространство, задана нагрузка $q(x, y)$, распределенная по некоторой области F. Для определения напряженно-деформированного состояния основания из двухфазных грунтов можно использовать выражения, полученные в предыдущем пункте, если воспользоваться принципом суперпозиции сил. Найдем выражение для вертикального смещения произвольной точки M, принадлежащей области загружения F. Пусть координаты точки M будут (x, y). Выделим некоторую элементарную площадку dF с центром в точке N с координатами $x=\xi$ и $y=\eta$. Элементарная сила, действующая в точке N, будет, очевидно, равна $q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, а „прогиб" основания в точке M от этой силы, согласно формуле (2.21), запишется:

$$dS = \frac{q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{4\pi G r}\left\{1 + \int_0^t Q(\tau)\, d\tau + 2(1-2\nu)\left[A\left(\frac{r}{\sqrt{ct}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^t Q(t, \tau)\, A\left(\frac{r}{\sqrt{c\tau}}\right) d\tau\right]\right\}, \qquad (3.1)$$

приложения силы, тем стабилизация осадки происходит быстрее. В полученных выше выражениях характеристики G; ν; $Q(t)$ и c соответствуют характеристикам механических свойств „скелета грунта".



Фиг. 2. Графики приведенных смещений границы полупространства $\bar{S}(t) = \frac{S(t)}{P} 4\pi G$ при действии сосредоточенной силы P при $Q(t)=0$ и $\nu=\nu_{ск}=0$.

§ 3. Полупространство под действием нагрузки, распределенной по некоторой области

Пусть на плоскости, ограничивающей полупространство, задана нагрузка $q(x, y)$, распределенная по некоторой области F. Для определения напряженно-деформированного состояния основания из двухфазных грунтов можно использовать выражения, полученные в предыдущем пункте, если воспользоваться принципом суперпозиции сил. Найдем выражение для вертикального смещения произвольной точки M, принадлежащей области загружения F. Пусть координаты точки M будут (x, y). Выделим некоторую элементарную площадку dF с центром в точке N с координатами $x = \xi$ и $y = \eta$. Элементарная сила, действующая в точке N, будет, очевидно, равна $q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, а „прогиб" основания в точке M от этой силы, согласно формуле (2.21), запишется:

$$dS = \frac{q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{4\pi G r} \left\{1 + \int_0^t Q(\tau)\, d\tau + 2(1-2\nu)\left[A\left(\frac{r}{\sqrt{ct}}\right) + \int_0^t Q(t, \tau)\, A\left(\frac{r}{\sqrt{c\tau}}\right) d\tau\right]\right\}, \quad (3.1)$$

где обозначено

$$\overline{r}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}. \tag{3.2}$$

Полное перемещение точки M от всей нагрузки, распределенной по площади F, представится интегралом

$$S(x,\ y,\ t)=\frac{1+\widetilde{Q}}{4\pi G}\Bigg[\iint\limits_F\frac{q\,(\xi,\ \eta)}{\overline{r}}d\xi d\eta+2\,(1-2\nu)\times$$

$$\times\iint\limits_F\frac{q\,(\xi,\ \eta)}{\overline{r}}A\left(\frac{\overline{r}}{\sqrt{ct}}\right)d\xi d\eta\ \Bigg]. \tag{3.3}$$

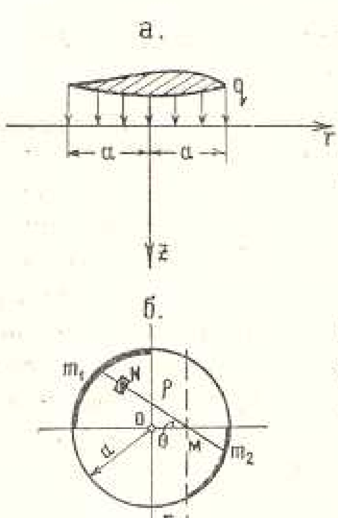
Рассмотрим более подробно случай равномерной загрузки основания по площади круга радиуса $r=a$. Пусть нагрузка P равномерно распределена по площади этого круга с интенсивностью

$$q=\frac{P}{\pi a^2}=\text{const}.$$

Из фиг. 3 видно, что полное перемещение точки M от всей нагрузки представится интегралом:

$$S(r,\ t)=\frac{q}{2\pi G}\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\Bigg\{\Bigg(\int\limits_0^{\varkappa_1}\Bigg[(1+\widetilde{Q})1+2\,(1-2\nu)\,(1+\widetilde{Q})\left\{A\left(\frac{\rho}{\sqrt{ct}}\right)\right\}\Bigg]d\rho+$$

$$+\int\limits_0^{\varkappa_2}\Bigg[(1+\widetilde{Q})1+2(1-2\nu)(1+\widetilde{Q})\left\{A\left(\frac{\rho}{\sqrt{ct}}\right)\right\}\Bigg]d\rho\Bigg)\Bigg\}, \tag{3.4}$$



Фиг. 3. Схема к расчету осадки полупространства при действии равномерно-распределенной нагрузки по площади круга.

где через $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ обозначены длины отрезков m_1M и m_2M, соответственно равные:

$$\begin{aligned}\varkappa_1&=\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}+r\cos\theta,\\ \varkappa_2&=\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}-r\cos\theta.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Формулу (3.4) перепишем следующим образом:

$$S(r,\ t)=\frac{q}{4\pi G}(1+\widetilde{Q})\Bigg[RE\,(n)+(1-2\nu)\times$$

$$\times\Bigg\{\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\Bigg[\int\limits_0^{\varkappa_1}A\left(\frac{\rho}{\sqrt{ct}}\right)d\rho+\int\limits_0^{\varkappa_2}A\left(\frac{\rho}{\sqrt{ct}}\right)d\rho\ \Bigg]\Bigg\}\Bigg], \tag{3.4a}$$

где $E\,(n)$ — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем $n=\dfrac{r}{a}$.

Вычислив интегралы по координате ρ, функцию

$$f(r;\ \theta,\ t)=\int\limits_0^{\varkappa_1} A\left(\frac{\rho}{\sqrt{ct}}\right)d\rho+\int\limits_0^{\varkappa_2} A\left(\frac{\rho}{\sqrt{ct}}\right)d\rho \qquad (3.6)$$

запишем в форме:

$$f(r;\theta,t)=\frac{\varkappa_1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\varkappa_1}{2\sqrt{ct}}\right)+\frac{\varkappa_2}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\varkappa_2}{2\sqrt{ct}}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}}\left(2-e^{-\varkappa_1/4ct}-e^{-\varkappa_2/4ct}\right)+\frac{\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}}\left[2-\frac{\sqrt{\pi ct}}{\varkappa_1}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\varkappa_1}{2\sqrt{ct}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{\pi ct}}{\varkappa_2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\varkappa_2}{2\sqrt{ct}}\right)\right]. \qquad (3.7)$$

Предельные значения функции $f(r;\ \theta;\ t)$ при $t=0$ и $t\to\infty$ равны соответственно

$$f(r;\ \theta;\ 0)=0;\quad f(r;\ \theta;\ \infty)=\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{2}=\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}. \qquad (3.8)$$

Заметим также, что при $r=0$ величина $\varkappa_1=\varkappa_2=a$, и функция $f(r;\ \theta;\ t)$ упрощается

$$f(0;\ \theta;\ t)\equiv f_0\left(\frac{a}{2\sqrt{ct}}\right)=a\,\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{ct}}\right)+\frac{2\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}}\left(1-e^{-a^2/4ct}\right)+$$

$$+\frac{2\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{\sqrt{\pi ct}}{a}\,\mathrm{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{ct}}\right)\right]. \qquad (3.7\text{a})$$

Используя вычисленное значение функции $f(r;\ \theta;\ t)$ (см. формулы (3.7) или (3.7а)), вертикальное смещение границы полупространства (3.4а) запишем в компактной форме

$$S(r,\ t)=\frac{q}{\pi G}(1+\bar{Q})\left[aE(n)+(1-2\nu)\left\{\int\limits_0^{\pi/2} f(r;\ \theta;\ t)\,d\theta\right\}\right]. \qquad (3.9)$$

Под центром гибкого штампа смещение будет равно

$$S_0(t)=\frac{q}{2G}(1+\bar{Q})\left[a+(1-2\nu)\left\{f_0\left(\frac{a}{2\sqrt{ct}}\right)\right\}\right]. \qquad (3.10)$$

В случае, когда „скелет" грунта основания не обладает свойствами ползучести $Q(t)=0$, формула (3.9) упростится. Остановимся подробнее на этом случае и проанализируем его.

Осадку под центром круглого абсолютного гибкого штампа найдем по формуле

$$S_0(t)=\frac{qa}{2G}+(1-2\nu)\frac{qa}{2G}\left\{\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{ct}}\right)+\right.$$

$$+\frac{2\sqrt{ct}}{a\sqrt{\pi}}\left(1-e^{-a^2/4ct}\right)+\frac{2\sqrt{ct}}{a\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{\sqrt{\pi ct}}{a}\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{ct}}\right)\right]\Bigg\}. \quad (3.10a)$$

Мгновенная величина осадки под центром круглого штампа равна на основании (3.10а)

$$S_0(0)=\frac{qa}{2G}, \quad (3.11)$$

а „стабилизированное" ее значение при $t\to\infty$ равно

$$S_0(\infty)=(1-\nu)\frac{qa}{G}. \quad (3.11a)$$

Нетрудно видеть, что выражения (3.11) совпадают с известными значениями „прогиба" основания, определяемого теорией упругости соответственно при $\nu=0{,}5$ и $\nu=\nu_{\text{ск}}$.

Таким образом, под центром гибкого круглого штампа осадка двухфазного основания, „скелет" которого не обладает свойствами ползучести, развивается от значений, определяемых формулой (3.11), до значений, определяемых формулой (3.11а).

Точно так же можно найти осадку под краем штампа, т. е. при $r=a$. Эта осадка при $Q(t)=0$ выразится в форме:

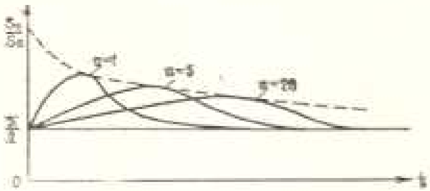
$$S_a(t)=\frac{q}{\pi G}\left[a+(1-2\nu)\int\limits_0^{a/\sqrt{ct}}\frac{\frac{1}{2}f_a(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\frac{a^2}{ct}-\xi^2}}\right], \quad (3.12)$$

где

$$\tfrac{1}{2}f_a(\xi)=\sqrt{ct}\,\xi\operatorname{erfc}(\xi)+\frac{\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}}\left(1-e^{-\xi^2}\right)+\frac{\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\operatorname{erf}(\xi)}{\xi}\right]. \quad (3.13)$$

Значение интеграла (3.12) легко вычисляется по методу Симпсона.

Интересно найти отношение S_0/S_a, характеризующее максимальную неравномерность осадки абсолютно гибкого штампа. Это отношение в рамках теории упругости, как известно, равно $\frac{\pi}{2}$ и не зависит ни от размеров штампа, ни от характеристик грунта. В случае двухфазной среды равенство $S_0/S_a=\frac{\pi}{2}$ возможно только при двух крайних значениях t: $t=0$ и $t\to\infty$. В течение всего процесса отношение S_0/S_a сначала возрастает до некоторого предела, а затем падает до значения $\frac{\pi}{2}$. При этом характер изменения S_0/S_a зависит от размеров штампа и свойств материала основания (см. фиг. 4).



Фиг. 4. Характер изменения отношения S_t/S_a во времени в процессе консолидации двухфазного грунта основания.

Таким образом, при расчетах реальных конструкций на водонасыщенных грунтах по деформациям необходимо провести анализ изменения напряженно-деформированного состояния во времени за весь период консолидации.

Институт оснований и подземных сооружений

Поступила 19 VII 1965

ՅՈՒ. Կ. ԶԱՐԵՑԿԻ

ԵՐԿՖԱԶ ԲՆԱՀՈՂԱՅԻՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՍՈՂՔԸ ՍԱՀՄԱՆԻՆ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ԿԻՐԱՌՎԱԾ ՈՒԺԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկված են երկֆազ բնահողային հիմնատակի սողքի հարցերը։ Ստացված է երկֆազ բնահողերի սողքի տեսության հավասարումների սիստեմը, որը հիմնավորված է Ֆլորին-Բիոյի ընդհանրացված մոդելի վրա։

Ստացված է կիսատարածության լարվածային-դեֆորմատիվ դրության խնդրի լուծումը սահմանին ուղղահայաց կիրառված ուժերի ազդեցության դեպքում։

Y. K. ZARETSKY

THE CREEP OF HALF-SPACE FROM TWO-PHASE SOIL UNDER THE INFLUENCE OF FORCES APPLIED NORMALLY TO THE BOUNDARY

Summary

The full system of equation of theory of the creeping of two-phase water-saturated soil is represented in this article.

The factor of creeping of the skeleton of the soil and percolating motion of void water is regarded simultaneously.

The author solves the problem of creeping of half-space under the action of point load and distributed load.

In the result the change of time of pore water pressure, stresses and displacement of boundary of half-space are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, 1952.
2. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
3. *Месчян С. Р.* Некоторые вопросы ползучести глинистых грунтов. Автореферат докторской диссертации, 1964.
4. *Лейбензон Л. С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, 1947.
5. *Флорин В. А.* Основы механики грунтов, т. II. Госстройиздат, 1961.
6. *Флорин В. А.* К вопросу о гидродинамических напряжениях в грунтовой массе. ГОНТИ, 1938.
7. *Biot M. A.* General Theory of Three Dimensional Consolidation. J. Applied Physics, v. **12**, 1941.
8. *Тан-Тьонг-Ки.* Вторичные временные эффекты и консолидация глин. Вопросы геотехники, сб. 3. Днепропетровское книжное изд-во, 1959.
9. *Mandel I.* Consolidation des conches d'argiles. Proceeding of the Fourth International Conference on Soils, v. 1, p. 300—367, 1957.
10. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. Гостехтеориздат, 1937.
11. *Короткин В. Г.* Определение напряжений в водонасыщенном основании при загрузке его сосредоточенной силой. Труды АПИ, № 178, 1955.
12. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматиздат, 1963.