ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, 1966, № 1 Механика

А. М. СИМОНЯН

О ДВУХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАДАЧАХ ПЛАСТИЧЕСКОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

В настоящей работе рассматриваются:

1. Задача о цилиндрической вращающейся вокруг своей оси трубе, находящейся под действием теплового потока в условиях плоской деформации.

2. Равновесие сферического сосуда под действием теплового потока и давлений на полости.

Обе рассматриваемые задачи сводятся к уравнениям, которые решаются методом последовательных уточнений [2].

Задача о вращающейся трубе при отсутствии теплового потока на основании физических соотношений, приведенных в работе [1], решена М. И. Розовским [3].

Решение задачи о равновесии сферического сосуда под действием давлений на полости при условиях нелинейной ползучести дано в работе Н. Х. Арутюняна и М. М. Манукяна [4], где используется ими же предложенный метод [5] решения нелинейных интегральных уравнений.

§ 1. Основные физические соотношения

Пусть материал несжимаем. В таком случае связь между деформациями и напряжениями в условиях пластической наследственности с учетом изменения температуры может быть принята следующей [1; 2]

$$\varepsilon_r(t)\,\varphi[\varepsilon_i(t)] = \sigma_r(t) - \sigma(t) - \int_{\tau_1}^{t}[\sigma_r(\tau) - \sigma(\tau)]\,H(t,\tau)\,d\tau +$$

$$+\,\alpha\Delta T(r,t)\,\varphi[\varepsilon_i(t)] \qquad (r,\ \varphi,\ z). \tag{1.1}$$

В системе уравнений (1.1) приняты обозначения

$$\sigma(t) = \frac{1}{3}\left[\sigma_r(t) + \sigma_\varphi(t) + \sigma_z(t)\right], \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_i(t) = \sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{r\varphi}^2 + \gamma_{\varphi z}^2 + \gamma_{zr}^2)}, \tag{1.3}$$

$$\Delta T(r,t) = T(r,t) - T_0, \tag{1.4}$$

где $T(r, t)$ — поле температур, а T_0 — температура, соответствующая отсутствию деформаций и напряжений (в случае отсутствия закреплений T_0 произвольна), α — коэффициент температурного удлинения.

Складывая уравнения системы (1.1), получим условие несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 3\alpha\Delta T(r, t). \tag{1.5}$$

§ 2. Задача о цилиндрической вращающейся трубе

Положим, что скорость вращения трубы $\omega(t)$ изменяется медленно и тангенциальным ускорением можно пренебречь. Тогда уравнение Даламбера запишется в виде

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + r\frac{\gamma\omega^2(t)}{g} = 0. \tag{2.1}$$

Подставляя условие плоской деформации

$$\varepsilon_z = 0, \tag{2.2}$$

из (1.5) получим дифференциальное уравнение относительно u, решением которого будет

$$u = \frac{3\alpha}{r}\int r\Delta T(r, t)\,dr + \frac{A(t)}{r}. \tag{2.3}$$

Из системы (1.1) найдем

$$\sigma_r(t) - \sigma_\varphi(t) = [\varepsilon_r(t) - \varepsilon_\varphi(t)]\cdot\varphi[\varepsilon_i(t)] + \\ + \int_{\tau_1}^{t}[\varepsilon_r(\tau) - \varepsilon_\varphi(\tau)]\,\varphi[\varepsilon_i(\tau)]\,R(t, \tau)\,d\tau, \tag{2.4}$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $H(t, \tau)$.

Интегрируя (2.4) по r и используя (2.1) и (2.3), получим

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{\gamma r^2}{2g}\omega^2(t) + M(r, t) + \int_{\tau_1}^{t} M(r, \tau)\,R(t, \tau)\,d\tau + B(t), \tag{2.5}$$

где

$$M(r, t) = \int\left[\frac{2A(t)}{r^3} - \frac{3\alpha}{r^3}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r, t)}{\partial r}\,dr\right]\varphi[\varepsilon_i(r, t)]\,dr. \tag{2.6}$$

Используя (1.3), (2.2) и (2.3), найдем

$$\varepsilon_i(r, t) = \sqrt{\left[\frac{A(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r, t)}{\partial r}\,dr\right]^2 + \frac{3}{4}\alpha^2\Delta T^2(r, T)}. \tag{2.7}$$

Учитывая, что на поверхностях трубы давления отсутствуют, из уравнения (2.7) получим

$$M(R_2, t) - M(R_1, t) = \frac{\gamma(R_2^2 - R_1^2)}{2g}\left[\omega^2(t) - \int_{\tau_1}^{t}\omega^2(\tau)\cdot H(t, \tau)\,d\tau\right], \tag{2.8}$$

где R_1 и R_2 — соответственно внутренний и наружный радиусы трубы.

Принимая степенную зависимость для функции φ

$$\varphi(x) = K_0\cdot x^{\mu-1}; \qquad \mu = \frac{1}{m}; \qquad 0 < \mu \leqslant 1, \tag{2.9}$$

где m — показатель ползучести, а также используя уравнения (2.8), (2.6), (2.7) и (2.9), запишем уравнение для определения функции $A(t)$

$$\int_{R_1}^{R_2}\left[\frac{2A(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2}\int^{r} r^2\frac{\partial\Delta T(r, t)}{\partial r}dr\right]\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{2A(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r, t)}{\partial r}dr\right]^2 + 3\alpha^2\Delta T^2(r, t)\right\}^{\frac{\mu-1}{2}}\frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{2^{\mu-2}\cdot\gamma(R_2^2 - R_1^2)}{K_0 g}\left[\omega^2(t) - \int_{\tau_1}^{t}\omega^2(\tau)\cdot H(t, \tau)\,d\tau\right]. \tag{2.10}$$

Функция $A(t)$, являющаяся решением (2.10), полностью определяет составляющие напряжений

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{\gamma}{2g}\omega^2(t)(r^2 - R_1^2) + [M(r, t) - M(R_1, t)] +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t}[M(r, \tau) - M(R_1, \tau)]\cdot R(t, \tau)\,d\tau, \tag{2.11}$$

$$\sigma_\varphi(r, t) = \sigma_r(r, t) + r\frac{\partial\sigma_r(r, t)}{\partial r} + \frac{\gamma r^2}{g}\omega^2(t), \tag{2.12}$$

$$\sigma_z(r, t) = \frac{1}{2}[\sigma_r(r, t) + \sigma_\varphi(r, t)] -$$

$$-\frac{3}{2}\left\{\alpha\Delta T(r, t)\cdot\varphi[\varepsilon_i(r, t)] + \int_{\tau_1}^{t}\alpha\Delta T(r, t)\cdot\varphi[\varepsilon_i(r, \tau)]\cdot R(t, \tau)\,d\tau\right\}. \tag{2.13}$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнения (2.10), осуществляемому методом последовательных уточнений $A(t)$, согласно которому

$$A(t) = \lim_{n\to\infty}\eta(f_{u_n}), \tag{2.14}$$

$$f_{u_{k+1}} = f_0 + f_{u_2} - B(f_{u_k}); \quad k = 0;\ 1;\ 2. \tag{2.15}$$

Здесь

$$B(f)=\frac{K_0}{2^{\mu-1}}\int_{R_1}^{R_2}\left|\frac{2\eta(f)}{r^2}-\frac{3\alpha}{r^2}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r,\ t)}{\partial r}dr\right|\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{2\eta(f)}{r^2}-\frac{3\alpha}{r^2}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r,\ t)}{\partial r}dr\right]^2+3\alpha^2\Delta T^2(r,\ t)\right\}^{\frac{\mu-1}{2}}\frac{dr}{r}, \qquad (2.16)$$

$$f_0=\frac{\gamma(R_2^2-R_1^2)}{2g}\left[\omega^2(t)-\int_{\tau_1}^{t}\omega^2(\tau)\cdot H(t,\ \tau)\,d\tau\right]. \qquad (2.17)$$

Для сходимости этого метода выбираемая нами функция $\eta(f)$ должна быть дифференцируемой по f и должно почти всюду удовлетворяться условие

$$0<B'(f)<2, \qquad (2.18)$$

т. е., согласно (2.16), условие

$$0<2^{2-\mu}K_0\frac{\partial\eta}{\partial f}\int_{R_1}^{R_2}\left\{\left[\frac{2\eta(f)}{r^2}-\frac{3\alpha}{r^2}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r,\ t)}{\partial r}dr\right]^2+3\alpha^2\Delta T^2(r,\ t)\right\}^{\frac{\mu-1}{2}}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{\left[\frac{2\eta(f)}{r^2}-\frac{3\alpha}{r^2}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r,\ t)}{\partial r}dr\right]^2(\mu-1)}{\left[\frac{2\eta(f)}{r^2}-\frac{3\alpha}{r^2}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r,\ t)}{\partial r}dr\right]+3\alpha^2\Delta T^2(r,\ t)}\right\}\frac{dr}{r^3}<2. \qquad (2.19)$$

Пусть

$$\eta(f)=R_0^2\varphi(R_0,\ t)+\beta R_0^2\left(\frac{R_0\cdot f}{2K_0\cdot(R_2-R_1)}\right)^m;\qquad \beta>0, \qquad (2.20)$$

где

$$\varphi(r,\ t)=\frac{3\alpha}{2r^2}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r,\ t)}{\partial r}dr. \qquad (2.21)$$

Формула (2.19) для отрицательных f вообще математически не определена, однако здесь мы будем иметь в виду для любых m

$$(-|f|)^m=-(|f|)^m. \qquad (2.22)$$

Из (2.20) с учетом (2.22) имеем

$$\frac{\partial\eta(f)}{\partial f}=\frac{m\beta R_0^2}{2^m}\left(\frac{R_0}{K_0(R_2-R_1)}\right)^m|f|^{m-1}. \qquad (2.23)$$

Вследствие положительности β и m, левое неравенство (2.22) удовлетворяется всюду, кроме точки $f=0$.

Подставляя (2.20) и (2.23) в правое неравенство (2.19), получим

$$\beta\cdot\int_{R_1}^{R_2}\frac{\left\{3m\alpha^2\Delta T^2(r,t)\cdot\chi^2(f)+\left|\frac{R_0^2}{r^2}\beta+\left|2\frac{R_0^2}{r^2}\psi(R_0,t)-2\psi(r,t)\right|\chi(f)\right|\right\}^2}{\left\{3\alpha^2\Delta T^2(r,t)\cdot\chi^2(f)+\left|\frac{R_0^2}{r^2}\beta+\left|2\frac{R_0^2}{r^2}\psi(R_0,t)-2\psi(r,t)\right|\chi(f)\right|\right\}^{\frac{3m-1}{2m}}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{R_0}{r}\right)^3\frac{dr}{R_2-R_1}<2, \tag{2.24}$$

где

$$\chi(f)=2^{m-1}\left(\frac{K_0\cdot(R_2-R_1)}{R_0\cdot f}\right)^m. \tag{2.25}$$

Поскольку f принимает лишь конечные значения, $|\chi(f)|$ ограничена снизу. Подинтегральное выражение в (2.24) будет конечным всегда, если только одновременно не равны нулю ΔT и выражение в фигурных скобках в числителе.

Принимая R_0 таким, что $\Delta T(R_0, t)\neq 0$, мы всегда можем выбрать такое достаточно малое β, что в точке $r=r_1$, для которой $\Delta T(r_1, t)=0$, выражение в фигурных скобках в числителе (2.24), вследствие ограниченности снизу $|\chi(f)|$, не будет равно нулю ни при каком конечном f. В таком случае интеграл в (2.24) всегда будет конечным, так что выбор достаточно малого β обеспечит удовлетворение (2.24). Таким образом, представление функции $\eta(f)$ в виде (2.20) оказывается приемлемым для применения указанного метода. В практических случаях удобнее всего брать $R_0=\frac{R_1+R_2}{2}$ и $\beta=1$, что, зачастую, приводит к близости $B'(f)$ к единице и, следовательно, к быстрой сходимости.

Рассмотрим несколько частных случаев.

а) *Случай стационарного теплового потока.*

Решая уравнение теплопроводности и учитывая (1.4), имеем

$$\Delta T(r)=a\ln r+b, \tag{2.26}$$

где

$$a=\frac{T_2-T_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}};\qquad b=T_1-T_0-\frac{\ln R_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}(T_2-T_1) \tag{2.27}$$

(T_1 и T_2 — температуры, заданные соответственно на полостях R_1 и R_2).

Формулы (2.10) и (2.20) выродятся в (2.28) и (2.29)

$$\frac{K_0}{2^{\mu-1}}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{2A(t)}{r^2}-\frac{3}{2}a\alpha\right)\left|\left(\frac{2A(t)}{r^2}-\frac{3}{2}a\alpha\right)^2+3\alpha^2\Delta T^2(r)\right|^{\frac{\mu-1}{2}}\frac{dr}{r}=f_0(t), \tag{2.28}$$

$$\eta(f)=\frac{3}{4}a\alpha R_0^2+\beta R_0^2\left(\frac{f\cdot R_0}{2K_0(R_2-R_1)}\right)^m. \tag{2.29}$$

б) *Случай задания перемещений.*

К рассматриваемому случаю можно придти, если рассчитываемая труба насажена на жесткий вращающийся вал или на нее насажена жесткая труба.

При заданном, например, $u|_{R_1} = w(t)$ функция $A(t)$ сразу определится по формуле (2.3)

$$A(t) = R_1 w(t) - 3\alpha\left[\int r\Delta T(r,\ t)\,dr\right]\Bigg|_{R_1}. \tag{2.30}$$

Отметим, что перемещения в этом случае полностью определяются через функцию $w(t)$ и не зависят от вращения трубы и от факта ползучести. Здесь

$$u = \frac{R_1}{r} w(t) + \frac{3\alpha}{r}\int\limits_{R_1}^{r} r\Delta T(r,\ t)\,dr. \tag{2.31}$$

в) *Случай отсутствия теплового потока.*

При $\Delta T(r,\ t) = 0$ уравнение (2.10) решается точно, в результате чего с учетом (2.17) получим

$$A(t) = R_1^2 R_2^2\left[\frac{f_0(t)\cdot\mu}{K_0(R_2^{2\mu} - R_1^{2\mu})}\right]^m. \tag{2.32}$$

Формула радиального перемещения будет иметь вид

$$u = \frac{1}{r}\left[\frac{\mu\cdot f_0(t)\cdot R_1^{2\mu}R_2^{2\mu}}{(R_2^{2\mu} - R_1^{2\mu})K_0}\right]^m. \tag{2.33}$$

Если в (2.17) принять ω постоянной, то (2.33) обратится в формулу (10) из [3] при несколько иных обозначениях для σ_i и m.

Численный пример.

Рассмотрим вращающуюся с постоянной скоростью трубу из горячекатанной стали 35 ГС, подверженную действию стационарного потока. Основные данные: $R_1 = 40$ *см*, $R_2 = 45$ *см*, $\omega = 60$ *об/сек*, $T_1 = 350\,^\circ$С, $T_2 = 450\,^\circ$С, $\alpha = 12\cdot 10^{-6}\frac{1}{\textit{град}}$, $T_0 = 400\,^\circ$С.

Представим ядро ползучести в виде [7]

$$H(t,\ \tau) = -\gamma C_0'(t-\tau)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\gamma)^n(t-\tau)^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}. \tag{2.34}$$

Аппроксимируя наши экспериментальные данные [6] по формуле

$$\frac{K_0}{2}\cdot 3^{\frac{3-\mu}{2}}\cdot\varepsilon_i^{\mu} = \sigma_i\left[1 + C_0'\left(1 - e^{-(1-\alpha)^{(1-\alpha)}\gamma(t-\tau_1)^{(1-\alpha)}}\right)\right], \tag{2.35}$$

в которой осуществлено приближенное интегрирование (2.34) [3], при $\alpha = \frac{2}{3}$ получим

$$\gamma = 0{,}05\,\frac{1}{час}, \qquad C_0' = 2{,}24, \qquad K_0 = 22000\ кг/см^2, \qquad \mu = \frac{1}{2}.$$

При решении уравнения (2.28), полагая $\beta = 1$ и $R_0 = \frac{R_1 + R_2}{2}$, получили быструю сходимость к точному решению. В табл. 1 даны значения $\Delta f_i(t) = f_0(t) - B[f_{i-1}(t)]$ для первых трех приближений.

Таблица 1

$t-\tau_1$	(*час*)	0	1	8	125
f_0	(*кг/см²*)	60,41296	65,02754	69,47309	81,92964
$A(t)$	(*см²*)	14,31493	14,36611	14,41516	14,55485
Δf_1	(*кг/см²*)	−25,63210	+26,86653	+27,81759	−29,17608
Δf_2	(*кг/см²*)	+3,50901	+1,83891	−0,40847	−4,64270
Δf_3	(*кг/см²*)	−0,19617	−0,23850	—	+1,23568

Таблица 2

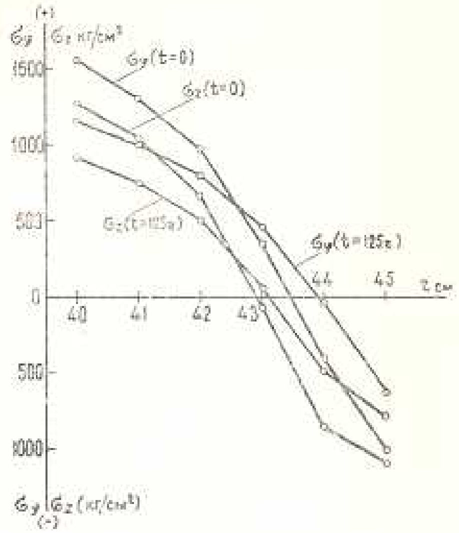
	$t-\tau_1$ (*час*)	r (*см*)					
		40	41	42	43	44	45
σ_r $\left(\frac{кг}{см^2}\right)$	0	0	23,478	39,010	44,954	28,826	0
	1	0	21,433	35,558	40,973	26,831	0
	8	0	19,581	32,417	37,308	25,009	0
	125	0	14,969	24,576	28,094	20,304	0
σ_φ $\left(\frac{кг}{см^2}\right)$	0	1552,85	1301,13	981,08	351,69	−409,84	−1007,43
	1	1458,35	1228,31	947,84	379,05	−324,25	−917,46
	8	1372,97	1162,07	906,63	403,74	−245,43	−837,92
	125	1160,87	996,71	802,15	461,97	−47,44	−621,83
σ_z $\left(\frac{кг}{см^2}\right)$	0	1269,68	1042,06	668,21	−72,31	−853,09	−1085,22
	1	1182,85	970,93	633,37	−46,11	−769,55	−1010,84
	8	1104,63	906,74	596,56	−13,09	−691,99	−947,67
	125	912,00	750,46	508,09	59,23	−484,83	−787,11
u_r (*см*)	0	0,04549	0,04465	0,04435	0,04478	0,04595	0,04782
	1	0,04677	0,04590	0,04557	0,04597	0,04712	0,04896
	8	0,04800	0,04710	0,04674	0,04711	0,04823	0,05004
	125	0,05149	0,05050	0,05006	0,05036	0,05140	0,05315

Вычисленные значения напряжений и перемещений даны в табл. 2 и графически изображены на фиг. 1 и фиг. 2.

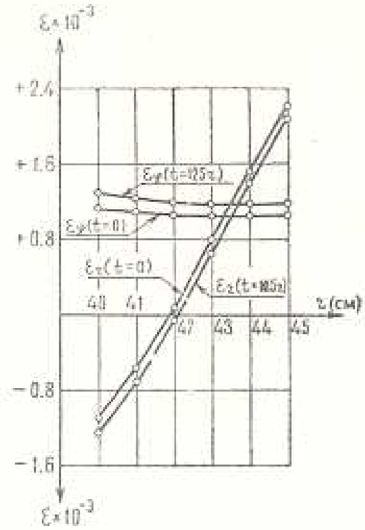
§ 3. Задача о сферическом сосуде

Рассмотрим сосуд, ограниченный двумя концентрическими полостями радиусов R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$, находящийся под действием внутреннего $q_1(t)$ и наружного $q_2(t)$ равномерных давлений, а также под действием теплового потока $T(r, t)$.

Будем использовать данные § 1 при замене z координатой θ. Аналогично § 2 найдем



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$u = \frac{3\alpha}{r^2}\int r^2 \Delta T(r,\ t)\, dr + \frac{A(t)}{r^2}. \qquad (3.1)$$

Используя (1.3) и (3.1), имеем

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{1}{3}}\cdot |\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r|. \qquad (3.2)$$

После ряда выкладок, аналогичных § 2, получим

$$\sigma_r = \frac{2K_0}{3^{\frac{\mu-1}{2}}}\int\limits_{R_1}^{r}(1+R^*)\left[|\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r|^{\mu-1}(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)\right]\frac{dr}{r} + q_1(t), \qquad (3.3)$$

где положено

$$R^* v(t) = \int\limits_{\tau_1}^{t} v(\tau)\cdot R(t,\ \tau)\, d\tau. \qquad (3.4)$$

Примем обозначение

$$x|x|^{\mu-1} = (\pm)|x|^{\mu}. \qquad (3.5)$$

Используя краевое условие на R_2, можно получить

$$\int\limits_{R_1}^{R_2}(\pm)|\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r|^{\mu}\frac{dr}{r} = \frac{3^{\frac{\mu-1}{2}}}{2K_0}\cdot(1 - H^*)\left[q_2(t) - q_1(t)\right]. \qquad (3.6)$$

Принимая во внимание (3.1), из (3.6) получим основное уравнение для определения $A(t)$, которое запишем в развернутом виде

$$\int_{R_1}^{R_2} (\pm) \left| \frac{A(t)}{r^3} - \frac{\alpha}{r^3} \int r^3 \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right|^{\mu} \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{1}{2K_0 \cdot 3^{\frac{1+\mu}{2}}} \cdot \left\{ q_2(t) - q_1(t) - \int_{\tau_1}^{t} [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \cdot H(t, \tau) d\tau \right. \qquad (3.7)$$

Уравнение (3.7) решаем тем же методом (2.14) и (2.15). Здесь

$$B(f) = \int_{R_1}^{R_2} (\pm) \left| \frac{\varphi(f)}{r^3} - \frac{\alpha}{r^3} \int r^3 \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right|^{\mu} \frac{dr}{r}, \qquad (3.8)$$

$$f_0 = \frac{1}{2K_0 \cdot 3^{\frac{\mu+1}{2}}} \cdot (1 - H^*) [q_2(t) - q_1(t)]. \qquad (3.9)$$

Будем искать функцию $\varphi(f)$, удовлетворяющую (2.18), в виде

$$\varphi(f) = R_0^3 \psi_1(R_0, t) + (\pm) \beta R_0^3 \left(\frac{R_0 |f|}{R_2 - R_1} \right)^m, \qquad (3.10)$$

где

$$\psi_1(r, t) = \frac{\alpha}{r^3} \int r^3 \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr. \qquad (3.11)$$

При использовании (3.8) и (3.10) условие (2.22) запишется в виде

$$0 < \beta \int_{R_1}^{R_2} \left| \beta \left(\frac{R_0}{r} \right)^3 + \chi_1(f) \left[\frac{R_0^3}{r^3} \psi_1(R_0, t) - \psi_1(r, t) \right] \right|^{\mu - 1} \left(\frac{R_0}{r} \right)^4 \frac{dr}{R_2 - R_1} < 2,$$

где (3.12)

$$\chi_1(f) = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_0} \right)^m \cdot \frac{1}{f |f|^{m-1}}. \qquad (3.13)$$

Левое неравенство (3.12) удовлетворяется при любом положительном β всюду, кроме точки $f = 0$, что допустимо для применения метода [2].

Аналогично § 2, можно показать, что при соответствующем подборе β и R_0 удовлетворяется правое неравенство (3.12).

Численный пример.

Рассмотрим сферический сосуд из горячекатанной стали 35ГС, подверженный действию стационарного теплового потока.

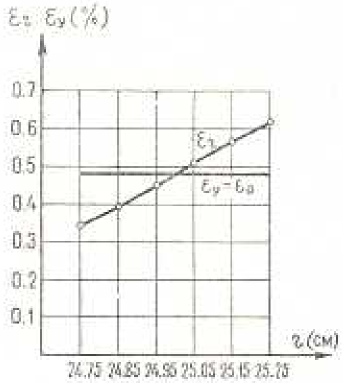
Основные данные: $R_1 = 24{,}75$ *см*; $R_2 = 25{,}25$ *см*; $T_1 = 360$ °C; $T_2 = 440$ °C; $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{град.}$ Данные о ползучести взяты те же, что и в § 2.

Вследствие отсутствия давлений на полостях, здесь $f_0 = 0$. Поскольку, кроме того, тепловой поток стационарен, находим, что A не зависит от t, то есть данная задача равносильна релаксационной.

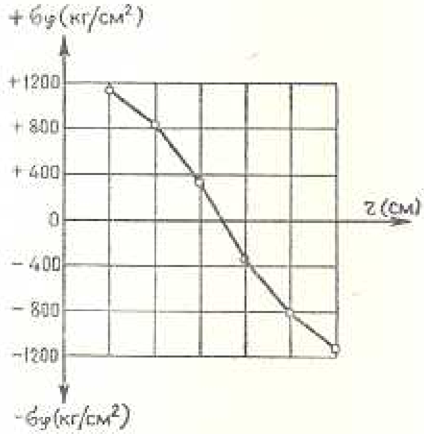
При этом составляющие напряжения оказываются пропорционально изменяющимися

$$\sigma_r(r, t) = \frac{\sigma_r(r, \tau_1)}{1 - N(t - \tau_1)}, \qquad (r, \varphi, \theta) \tag{3.14}$$

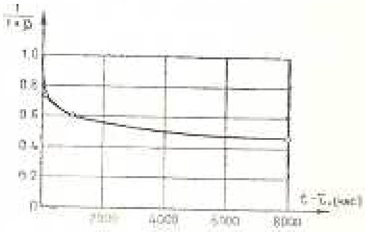
Результаты вычислений даны в табл. 3 и 4 и графически изображены на фиг. 3—5.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Таблица 3

r (см)	24,75	24,85	24,95	25,05	25,15	25,25
u (см)	0,118984	0,119350	0,119770	0,120250	0,120790	0,121380
ε_r (%)	0,341	0,392	0,450	0,510	0,566	0,612
$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$ (%)	0,480743	0,480281	0,480040	0,480039	0,480278	0,480712
σ_r (кг/см²)	0	7,9793	13,5455	13,3309	7,7523	0
$\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ (кг/см²)	1119,82	840,84	344,87	−348,98	−829,07	−1114,72

Таблица 4

$t - \tau_1$ (час)	0	1	8	125	1000	8000
$N(t - \tau_1)$	0	0,07638	0,14997	0,35616	0,65598	1,11984

§ 4. Учет зависимости характеристик ползучести от температуры

Рассматривая ядра ползучести и релаксации как функции от r, аналогично § 2 и § 3, получим соответственно для вращающейся трубы и сферического сосуда

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{\gamma r^2}{2g}\omega^2(t) + M(r, t) + \int\int_{\tau_1}^{t} \frac{\partial M(r, \tau)}{\partial r} R(t, \tau, r) d\tau dr + B(t), \tag{4.1}$$

$$\sigma_r(r, t) = M(r, t) + \int\int_{\tau_1}^{t} \frac{\partial M(r, \tau)}{\partial r} R(t, \tau, r) d\tau dr + B(t). \tag{4.2}$$

Здесь $M(r, t)$ для вращающейся трубы (4.1) определяется по формуле (2.6), а для сферического сосуда (4.2) — по формуле (4.3)

$$M(r, t) = 2\int (\pm) K_0(r) \cdot 3^{\frac{\mu(r)-1}{2}} \left| \frac{A(t)}{r^3} - \frac{\alpha}{r^3}\int r^2 \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right|^{\mu(r)} \frac{dr}{r}. \tag{4.3}$$

Используя для уравнений (4.1) и (4.2) те же краевые условия, что и в § 2 и § 3, получим для обоих случаев

$$\int_{R_1}^{R_2} \left[Q(r, t) + \int_{\tau_1}^{t} Q(r, \tau) R(t, \tau, r) d\tau \right] dr = S(t), \tag{4.4}$$

где

$$Q(r, t) = \frac{\partial M(r, t)}{\partial r}. \tag{4.5}$$

Функция $S(t)$ здесь для вращающейся трубы имеет выражение

$$S(t) = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2g} \gamma \omega^2(t), \tag{4.6}$$

а для сферического сосуда —

$$S(t) = q_2(t) - q_1(t). \tag{4.7}$$

Из уравнения (4.4) методом последовательного уточнения можно определить $A(\tau_1)$

$$A(\tau_1) = \lim_{n \to \infty} \eta_1(f_{u_n}), \tag{4.8}$$

$$f_{u_{k+1}} = S(\tau_1) + f_{u_k} - B(f_{u_k}). \tag{4.9}$$

Здесь $B(f)$ для вращающейся трубы равно

$$B(f)=\int_{R_1}^{R_2}\frac{K_0(r)}{2^{m(r)-1}}\left|\frac{2\gamma_1(f)}{r^2}-\frac{3\alpha}{r^2}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r,\tau_1)}{\partial r}dr\right|\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{2\gamma_1(f)}{r^2}-\frac{3\alpha}{r^2}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r,\tau_1)}{\partial r}dr\right]^2-3\alpha^2\Delta T^2(r,\tau_1)\right\}^{\frac{m(r)-1}{2}}\frac{dr}{r}, \qquad (4.10)$$

а для сферического сосуда —

$$B(f)=2\int_{R_1}^{R_2}(\pm)K_0(r)3^{\frac{m(r)-1}{2}}\left|\frac{\gamma_1(f)}{r^3}-\frac{\alpha}{r^3}\int r^2\frac{\partial\Delta T(r,\tau_1)}{\partial r}dr\right|^{m(r)}\frac{dr}{r}. \quad (4.11)$$

Выберем функцию $\gamma_1(f)$ для вращающейся трубы и сферического сосуда соответственно в виде следующих выражений

$$\gamma_1(f)=R_0^2\varphi(R_0,\tau_1)+(\pm)\beta R_0^2\left(\frac{R_0|f|}{2(R_2-R_1)K_0(R_0)}\right)^{m(R_0)} \qquad (4.12)$$

$$\gamma_1(f)=R_0^3\varphi_1(R_0,\tau_1)+(\pm)\beta R_0^3\left(\frac{R_0|f|}{2(R_2-R_1)K_0(R_0)}\right)^{m(R_0)}3^{\frac{2m(R_0)}{m(R_0)+1}}. \quad (4.13)$$

После определения значения $A(\tau_1)$ известным становится $Q(r,\tau_1)$, которое равно подинтегральному выражению соответственно в (4.10) и (4.11) при замене $\gamma_1(f)$ величиной $A(\tau_1)$.

Примем для $Q(r,t)$ кусочно-линейную аппроксимацию по t

$$Q(r,t)=Q(r,\tau_1)+(t-\tau_1)\frac{Q(r,t_1)-Q(r,\tau_1)}{t_1-\tau_1};\quad \tau_1\leqslant t\leqslant t_1 \qquad (4.14)$$

и вообще

$$Q(r,t)=Q(r,t_i)+(t-t_i)\frac{Q(r,t_{i+1})-Q(r,t_i)}{t_{i+1}-t_i};\quad t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}. \quad (4.15)$$

Подставляя (4.14) в (4.4), при $t=t_1$ получим

$$\int_{R_1}^{R_2}Q(r,t_1)\left[1+\frac{1}{t_1-\tau_1}\int_{\tau_1}^{t_1}(\tau-\tau_1)R(t_1,\tau,r)d\tau\right]dr=$$

$$=S(t_1)-\frac{1}{t_1-\tau_1}\int_{R_1}^{R_2}Q(r,\tau_1)\left[\int_{\tau_1}^{t_1}(t_1-\tau)R(t_1,\tau,r)d\tau\right]dr. \qquad (4.16)$$

Подставляя (4.15) в (4.4), при $t=t_{i+1}$ получим

$$\int_{R_1}^{R_2}Q(r,t_{i+1})\left[1+\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\tau-t_i)R(t_{i+1},\tau,r)d\tau\right]dr=$$

$$= S(t_{i+1}) - \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \frac{Q(r, \tau_1)}{t_1 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{t_1} (t_1 - \tau) R(t_{i+1}, \tau, r)\, d\tau + \right.$$

$$+ \frac{Q(r, t_1)}{t_1 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{t_1} (\tau - \tau_1) R(t_{i+1}, \tau, r)\, d\tau + \frac{Q(r, t_1)}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau) R(t_{i+1}, \tau, r)\, d\tau +$$

$$+ \frac{Q(r, t_2)}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (\tau - t_1) R(t_{i+1}, \tau, r)\, d\tau + \frac{Q(r, t_2)}{t_3 - t_2} \int_{t_2}^{t_3} (t_3 - \tau) R(t_{i+1}, \tau, r)\, d\tau + \ldots +$$

$$+ \frac{Q(r, t_i)}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\tau - t_{i-1}) R(t_{i+1}, \tau, r)\, d\tau +$$

$$\left. + \frac{Q(r, t_i)}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - \tau) R(t_{i+1}, \tau, r)\, d\tau \right\} dr. \qquad (4.17)$$

Нетрудно усмотреть, что при последовательном определении $A(t_i)$ уравнения (4.16) и (4.17) могут быть записаны в виде

$$\int_{R_1}^{R_2} F(A(t_i), r)\, dr = f_0^i(t_i), \qquad (4.18)$$

где F и f_0^i — заданные функции, а $A(t_i)$ — искомая величина, и, следовательно, могут быть разрешимы [2] методом последовательных уточнений. Здесь будем иметь

$$A(t_i) = \lim_{n \to \infty} \eta_i(f_{u_n}^i), \qquad (4.19)$$

$$f_{u_{n+1}}^i = f_0^i + f_{u_n}^i - B(f_{u_n}^i). \qquad (4.20)$$

Функция $B(f^i)$ для вращающейся трубы имеет выражение

$$B(f^i) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{K_0(r)}{2^{\mu(r)-1}} \left[\frac{2\eta(f^i)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int r^2 \frac{\partial \Delta T(r, t_i)}{\partial r}\, dr \right] \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{2\eta(f^i)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int r^2 \frac{\partial \Delta T(r, t_i)}{\partial r}\, dr \right]^2 + 3\alpha^2 \Delta T^2(r, t_i) \right\}^{\frac{\mu(r)-1}{2}} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t}^{t_i} (\tau - t_{i-1}) R(t_i, \tau, r)\, d\tau \right] \frac{dr}{r}, \qquad (4.21)$$

а для сферического сосуда —

$$B(f^i)=2\int\limits_{R_1}^{R_2}(\pm)K_0(r)\,3^{\frac{\mu(r)-1}{2}}\left|\frac{\eta(f^i)}{r^3}-\frac{\alpha}{r^3}\int^{r}r^2\frac{\partial\Delta T(r,\ t_i)}{\partial r}dr\right|^{\mu(r)}\times$$

$$\times\left[1+\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(\tau-t_{i-1})\,R\,(t_i,\ \tau,\ r)\,d\tau\right]\frac{dr}{r}. \tag{4.22}$$

Величина f_0^i здесь равна правой части разрешаемого уравнения (4.16) или (4.17).

Функцию $\eta(f^i)$ определим для вращающейся трубы по формуле

$$\eta(f^i)=R_0^2\psi(R_0,\ t_i)+$$

$$+(\mp)\beta R_0^2\left\{\frac{R_0|f^i|}{2(R_2-R_1)K_0(R_0)\left[1+\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(\tau-t_{i-1})R(t_i,\tau,R_0)\,d\tau\right]}\right\}^{m(R_0)}, \tag{4.23}$$

а для сферического сосуда — по формуле

$$\eta(f^i)=R_0^3\psi_1(R_0,\ t_i)-(\pm)\beta R_0^3\times$$

$$+\left\{\frac{R_0|f^i|}{2(R_2-R_1)K_0(R_0)\left[1+\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(\tau-t_{i-1})R(t_i,\tau,R_0)\,d\tau\right]}\right\}^{m(R_0)}\times$$

$$\times\,3^{\frac{2\mu(R_0)}{\mu(R_0)-1}}. \tag{4.24}$$

Аналогично § 2 и § 3 можно доказать, что при соответствующем выборе R_0 и малого β можно удовлетворить условию (2.18), необходимому для применения метода, на чем здесь останавливаться не будем. В практических случаях, по-видимому, удобно брать $\beta=1$ и $R_0=\dfrac{R_1+R_2}{2}$.

В заключение отметим, что, вообще говоря, вместо кусочно-линейной аппроксимации (4.14) и (4.15) можно взять и любую другую кусочную аппроксимацию; при этом в уравнениях (4.16) и (4.17) подынтегральные выражения интегралов по времени будут изменены, хотя принцип решения останется тем же.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 V 1965

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ ուսումնասիրված են հետևյալ երկու խնդիրները.

1. Ջերմային հոսքի ազդեցության տակ գտնվող իր առանցքի շուրջը պտտվող գլանային խողովակի հավասարակշռությունը հարթ դեֆորմացիայի ժամանակ։

2. Ջերմային հոսքի և ներքին ճնշման ազդեցության տակ գտնվող գնդաձև անոթի հավասարակշռությունը։

Ընդունվում է, որ նյութը ենթարկվում է պլաստիկական ժառանգականության օրենքներին։

Ուսումնասիրված երկու խնդիրներն էլ բերվում են հավասարումների, որոնք լուծվում են հաջորդական ճշտումների մեթոդով։

Առանձին ուսումնասիրված է այն դեպքը, երբ սողքի երևույթը բնութագրող պարամետրերը կախված են ջերմաստիճանից։ Բերված են թվային օրինակներ։

A. M. SIMONIAN

TWO HEAT PROBLEMS ON PLASTIC HEREDITY

Summary

The paper deals with:

1) Heat problems of cylindrical tubes which rotate around their axis;

2) The equilibrium of the spherical vessel under the effect of heat flow and the pressure on the surface.

The problems brought to equations solved by consecutive specificity offered by the author are determined.

The case of the characteristics of plasticity which depends on temperature is examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 22, в. 5, 1959.
2. *Симонян А. М.* Температурная задача цилиндрических труб в условиях пластической наследственности. Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 4, 1965.
3. *Розовский М. И.* Изучение ползучести вращающейся трубы на основе интегрально-операторных уравнений. Доповіді Академії наук УРСР, № 3, 1960.

4. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Ползучесть сферического сосуда. ДАН АрмССР, **27**, № 4, 1958.
5. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ, **22**, № 6, 1958.
6. *Симонян А. М.* Экспериментальное исследование ползучести и влияние ее на механические свойства горячекатанной стали. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **18**, № 2, 1965.
7. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, **12**, вып. 1, 1948.