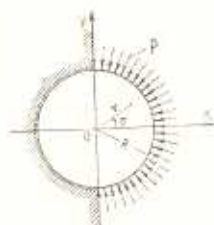


В. Г. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
 ДЛЯ КРУГА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В настоящей работе дано решение плоской задачи теории упругости для круга в случае действия на части контура $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ равномерно распределенной радиальной нагрузки интенсивностью p , при отсутствии радиальных перемещений на остальной части контура $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ и касательных напряжений—на всем контуре (фиг. 1).



Фиг. 1.

Основная смешанная задача плоской теории упругости для односвязной области, когда на одной части границы заданы внешние усилия, а на другой — смещения, решена в общем виде Д. И. Шерманом [3]. Им же решена основная смешанная задача для плоских многосвязных областей [4]. В случае, когда область представляет собой круг, М. Е. Карапетяном [6] рассмотрена задача, когда граница разбивается на конечное число дуг, на которых поочередно заданы либо напряжения, либо перемещения.

§ 1. Постановка задачи

Для решения рассматриваемой задачи воспользуемся известными уравнениями плоской теории упругости [1]:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}], \tag{1.1}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{z\theta}, \tag{1.2}$$

$$2u + iv = [z\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}]e^{-i\theta}, \tag{1.3}$$

где r и θ — полярные координаты, σ_r и σ_θ — нормальные напряжения, соответственно в сечениях $r = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$, $\tau_{r\theta}$ — касательное напряжение, u и v — смещения точки соответственно по радиальному и тангенциальному направлениям, $z = re^{i\theta}$, $\bar{z} = re^{-i\theta}$,

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z) = \gamma''(z), \tag{1.4}$$

$\varphi(z)$ и $\gamma(z)$ — голоморфные в рассматриваемой области функции,

$$x = 3 - 4z \tag{1.5}$$

в случае плоского деформированного состояния,

$$\nu = \frac{3 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad (1.6)$$

в случае плоского напряженного состояния, ε — коэффициент Пуассона.

Функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ определяются из следующих граничных условий:

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (1.7)$$

$$\sigma_r|_{r=R} = -p \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (1.8)$$

$$2\psi|_{r=R} = 0 \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}, \quad (1.9)$$

§ 2. Представление напряжений и деформаций в виде рядов

Функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ в области круга разложим в ряды

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, & \overline{\varphi(z)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} \overline{z}^k, \\ \chi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, & \overline{\chi(z)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{b_k} \overline{z}^k, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где a_k и b_k — вообще комплексные коэффициенты, но в данной задаче в силу симметрии относительно оси x , они будут действительными числами.

Учитывая (2.1), из (1.4) получим

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, & \Psi(z) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k z^{k-2}, \\ \overline{\Phi(z)} &= \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{a_k} \overline{z}^{k-1}, & \overline{\Psi(z)} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \overline{b_k} \overline{z}^{k-2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Внося (2.2) в (1.1) и (1.2), находим окончательные выражения для напряжений

$$\sigma_r = 2a_1 + 2a_2 r \cos \theta - \sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)(k-2)a_{k-1} + k(k-1)b_k r^{-2}] r^k \cos k\theta, \quad (2.3)$$

$$\sigma_\theta = 2a_1 + 6a_2 r \cos \theta + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+1)(k+2)a_{k-1} + k(k-1)b_k r^{-2}] r^k \cos k\theta, \quad (2.4)$$

$$\tau_{r\theta} = 2a_2 r \sin \theta + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k+1)a_{k+1} + k(k-1)b_k r^{-2}] r^k \sin k\theta. \quad (2.5)$$

Пользуясь (2.1), из (1.3), с учетом (1.4), находим смещения u и v

$$2\mu u = -b_1 \cos \theta + (\nu - 1)a_1 r + (\nu - 2)a_2 r^2 \cos \theta + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} [(\nu - k - 1)a_{k+1} - kb_k r^{-2}] r^{k+1} \cos k\theta, \quad (2.6)$$

$$2\mu v = b_1 \sin \theta + (\nu + 2)a_2 r^2 \sin \theta + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} [(\nu + k + 1)a_{k+1} + kb_k r^{-2}] r^{k+1} \sin k\theta. \quad (2.7)$$

§ 3. Определение коэффициентов a_k и b_k

Граничное условие (1.7), с учетом (2.5), примет вид

$$2a_2 R \sin \theta + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k+1)a_{k+1} + k(k-1)b_k R^{-2}] R^k \sin k\theta = 0,$$

откуда получим, что

$$a_2 = 0, \quad (3.1) \\ (k+1)a_{k+1} + (k-1)b_k R^{-2} = 0 \quad (k=2, 3, \dots)$$

и, следовательно,

$$b_k = -\frac{k+1}{k-1} a_{k+1} R^2 \quad (k=2, 3, \dots). \quad (3.2)$$

Перейдем к удовлетворению граничного условия (1.8). Предварительно, используя (3.1) и (3.2), преобразуем выражение (2.3)

$$\sigma_r|_{r=R} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k\theta \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.3)$$

где

$$A_k = 2(k+1)a_{k+1}R^k \quad (k=0, 2, 3, \dots), \quad (3.4)$$

причем, согласно (3.1),

$$A_1 = 0. \quad (3.5)$$

Граничное условие (1.8) переписывается в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k\theta = -p \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Умножив это равенство на $\cos 2n\theta$ и проинтегрировав его в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_k

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos k\theta \cos 2n\theta d\theta = -p \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2n\theta d\theta, \quad (3.6)$$

Учитывая, что

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos k\theta \cos 2n\theta d\theta = \begin{cases} \pi & \text{при } k = 2n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } k = 2n \quad (n > 0) \\ 0 & \text{при } k = 2m \quad (m \neq n) \\ \frac{(-1)^{n-m} 2(2m+1)}{(2m+1)^2 - 4n^2} & \text{при } k = 2m + 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

$m = 0, 1, 2, 3, \dots$
 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

и обозначая

$$x_{2n} = -p \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2n\theta d\theta = \begin{cases} -p\pi & \text{при } n = 0 \\ 0 & \text{при } n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (3.8)$$

из (3.6), с учетом (3.5), получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\pi A_0 - \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} A_2 + \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5} A_4 - \dots = x_0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\pi}{2} A_{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \cdot 2(2m-1)}{(2m+1-2n)(2m+1+2n)} A_{2m-1} = x_{2n} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Удовлетворим теперь граничному условию (1.9). Используя (3.1) и (3.2), преобразуем выражение (2.6)

$$2\mu u|_{r=R} = -b_1 \cos \theta + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos k\theta, \quad (3.10)$$

где

$$B_k = \left(\alpha - \frac{k+1}{k-1} \right) a_{k-1} R^{k-1} \quad (k=0, 2, 3, \dots) \quad (3.11)$$

и, согласно (3.1),

$$B_1 = 0. \quad (3.12)$$

Заметим, что коэффициент b_1 дает только жесткое смещение всего тела (поворот, ввиду симметрии граничных условий и внешней нагрузки, исключен) и не влияет на напряженное состояние.

Согласно (3.10), условие (1.9) примет вид

$$-b_1 \cos \theta + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos k\theta = 0 \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad (k=0, 2, 3, \dots).$$

Умножив обе части этого равенства на $\cos 2n\theta = \cos 2n(\theta - \pi)$ и проинтегрировав в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, получим систему уравнений для определения коэффициентов B_k :

$$\pi B_0 + \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} B_3 - \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5} B_5 + \dots = -2b_1, \quad (3.13)$$

$$\frac{\pi}{2} B_{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m-1} 2(2m+1)}{(2m+1-2n)(2m+1+2n)} B_{2m-1} = \frac{(-1)^n \cdot 2b_1}{4n^2 - 1},$$

Между коэффициентами бесконечных систем уравнений (3.9) и (3.13), согласно (3.4) и (3.11), имеется следующая зависимость:

$$A_k = c_k B_k \quad (k=0, 2, 3, \dots), \quad (3.14)$$

где

$$c_k = \frac{2(k^2 - 1)}{k(x+1) - x + 1} \cdot \frac{1}{R} \quad (k=0, 2, 3, \dots). \quad (3.15)$$

Пользуясь (3.14), преобразуем систему (3.9)

$$\pi c_0 B_0 - \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} c_3 B_3 + \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5} c_5 B_5 - \dots = \alpha_n, \quad (3.16)$$

$$\frac{\pi}{2} c_{2n} B_{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m} \cdot 2(2m+1)}{(2m+1-2n)(2m+1+2n)} c_{2m-1} B_{2m-1} = \alpha_{2n},$$

($n=1, 2, 3, \dots$)

Исключим из систем (3.13) и (3.16) неизвестные B_{2n} ($n=0, 1, 2, \dots$), для чего разделим каждое n -ое уравнение системы (3.16) на c_{2n} и вычтем соответствующее уравнение системы (3.13). При этом, разделив результат на 2 и умножив на c_{2n} , получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(c_{2m-1} + c_{2n})(2m+1)}{(2m+1-2n)(2m+1+2n)} B_{2m-1} = \frac{\alpha_{2n}}{2} - \frac{(-1)^m c_{2n}}{4n^2 - 1} b_1, \quad (3.17)$$

($n=0, 1, 2, \dots$)

Вводя новые неизвестные

$$D_{2m-1} = (-1)^m (2m+1) B_{2m-1} \quad (m=1, 2, 3, \dots), \quad (3.18)$$

вместо (3.17) будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(c_{2m-1} + c_{2n}) \cdot D_{2m-1}}{(2m+1-2n)(2m+1+2n)} = \frac{\alpha_{2n}}{2} - \frac{(-1)^n c_{2n}}{4n^2 - 1} b_1, \quad (3.19)$$

($n=0, 1, 2, \dots$)

§ 4. Исследование полученной бесконечной системы

С целью приведения системы (3.19) к регулярному виду, сложим каждое уравнение этой системы со своим последующим. При этом получим новую систему

$$\sum_{n=1}^{\infty} N(n, m) \frac{(-1)^{n-1} D_{2m-1}}{(2m-1-2n)(2m-3-2n)} = \frac{a_{2n} + a_{2n+2}}{2} + \frac{(-1)^n [(2n-1)c_{2n-2} - (2n+3)c_{2n}]}{(4n^2-1)(2n+3)} b_1, \quad (4.1)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

где

$$N(n, m) = \frac{2m-3-2n}{2m+1-2n} \left[(c_{2m+1} + c_{2n+2}) \frac{2m+1-2n}{2m+3+2n} - (c_{2m-1} + c_{2n}) \frac{2m-1-2n}{2m+1-2n} \right], \quad (4.2)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$
 $(m = 1, 2, 3, \dots)$

Доказательство эквивалентности систем (3.19) и (4.1) будет приведено ниже.

Покажем, что система (4.1) регулярна. Из (3.15) имеем

$$c_{2m-1} = \frac{4m(m+1)}{(x+1)m+1} \cdot \frac{1}{R} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.3)$$

$$c_{2n} = \frac{2(4n^2-1)}{(2n-1)x+2n+1} \cdot \frac{1}{R} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

С учетом этих соотношений выражение (4.2) после некоторых простых преобразований примет вид

$$N(n, m) = \frac{2m-3-2n}{2m+1-2n} \left\{ \frac{16m(m+1)(2n+1)}{[(x+1)m+1](2m+1+2n)(2m+3+2n)} + \frac{16m(m+1)(2n+1)[(2n-1)x+2n+3]}{[(2n-1)x+2n+1][(2n+1)x+2n+3](2m+1+2n)(2m+3+2n)} + \frac{4(x+1)(4n^2-1)(2n+1)(2n+3)}{[(2n-1)x+2n+1][(2n+1)x+2n+3](2m+1+2n)(2m+3+2n)} \right\} \cdot \frac{1}{R}, \quad (4.4)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$
 $(m = 1, 2, 3, \dots)$

Предполагая, что неизвестный коэффициент b_1 , входящий в правые части уравнений системы, является ограниченной величиной и оставляя первое ($n=0$) уравнение для его определения, докажем регулярность системы (4.1) при $n=1, 2, 3, \dots$.

Разрешая n -ое уравнение системы относительно n -ого члена, приведем систему (4.1) к виду

$$D_{2n-1} = \frac{-1}{C(n, n)} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} C(n, m) \cdot D_{2m-1} + \frac{K_n}{C(n, n)}, \quad (4.5)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

где

$$C(n, m) = \frac{N(n, m)}{(2m-1)(2n)(2m-3-2n)}, \quad (4.6)$$

$$K_n = (-1)^{n+1} \left\{ \frac{a_{2n} + a_{2n-2}}{2} + \frac{(-1)^n [(2n-1)c_{2n+2} - (2n+3)c_{2n}]}{(4n^2-1)(2n+3)} b_1 \right\}, \quad (4.7)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

Легко показать, что

$$C(n, m) = \begin{cases} > 0 & \text{при } m < n \\ < 0 & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (4.8)$$

Учитывая (4.8), получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left| \frac{C(n, m)}{C(n, n)} \right| &= \frac{1}{|C(n, n)|} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} C(n, m) = \\ &= \frac{1}{|C(n, n)|} \left| \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) - C(n, n) \right| = \frac{C(n, n)}{|C(n, n)|} + \\ &+ \frac{1}{|C(n, n)|} \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) = 1 - \frac{1}{C(n, n)} \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) > 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

Опуская выкладки, приведем результат вычисления ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) \quad [7]:$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) &= \frac{2}{\Omega \cdot R} \left\{ 8x(x-1)(2n-1) \left[\psi\left(\frac{x+2}{x-1}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - n\right) \right] - \right. \\ &- \frac{1}{(x+1)^2(4n^2-1)(2n+3)} [64n^6 - 256n^5 + 464n^4 + 384n^3 + 12n^2 - \\ &- 112n - 33] x^5 + (320n^5 + 1280n^4 + 2128n^3 + 1536n^2 + 36n^2 - \\ &- 464n - 129) x^4 + (640n^6 + 2560n^5 + 3808n^4 + 2176n^3 - 296n^2 - \\ &- 704n - 174) x^3 + (640n^5 + 2560n^4 + 3296n^3 + 1152n^2 - 552n^2 - \\ &- 448n - 78) x^2 + (320n^6 + 1280n^5 + 1360n^4 - 420n^3 - \end{aligned}$$

$$-80n + 15)x + (64n^6 + 256n^5 + 208n^4 - 128n^3 - 116n^2 + 16n + 15)], \quad (4.10)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

где

$$\Omega = [(2n-1)x + 2n + 1][(2n+1)x + 2n - 1][(2n+1)x + 2n + 3] \times \\ \times [(2n+3)x + 2n + 1], \quad (4.11)$$

а $\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции [5]. Заметим, что функция $\psi(x)$ при любом x — возрастающая. Согласно (1.5) имеем $1 \leq x < 3$, следовательно, $\frac{5}{4} \leq \frac{x-2}{x+1} < \frac{3}{2}$.

Обозначив

$$\beta\left(\frac{x+2}{x+1}, n\right) = \psi\left(\frac{x+2}{x+1}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - n\right)$$

и учитывая, что $\beta\left(\frac{3}{2}, n\right) = \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - n\right)$ — убывающая функция, получим очевидную оценку, верную при любом n :

$$\beta\left(\frac{x+2}{x+1}, n\right) \leq \beta\left(\frac{3}{2}, n\right) \leq \beta\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 0. \quad (4.12)$$

Имея в виду (4.12), легко видеть, что выражение в фигурных скобках отрицательно при всех значениях $n = 1, 2, 3, \dots$.

Отсюда заключаем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) \leq 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.13)$$

причем знак равенства имеет место при $n \rightarrow \infty$.

Учитывая (4.8) и (4.13), получим

$$\frac{1}{C(n, n)} \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.14)$$

Введя обозначение

$$\gamma = \frac{1}{C(n, n)} \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.15)$$

из (4.9) окончательно получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{C(n, m)}{C(n, n)} \right| - 1 - \gamma > 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

откуда, учитывая (4.14), заключаем, что $0 < \gamma < 1$. Следовательно, рассматриваемая бесконечная система уравнений (4.1) регулярна.

Легко показать, что свободные члены этой системы имеют порядок $\frac{1}{n^2}$ (полагая b_1 ограниченной величиной). Это обеспечивает на основании [2] эквивалентность систем (3.19) и (4.1), т. е. решения системы (4.1) будут решениями системы (3.19).

§ 5. Решение задачи при $\sigma = 0$

1. Определение коэффициентов бесконечных систем уравнений

После того, как регулярность бесконечной системы уравнений доказана, перейдем к ее решению для случая $\sigma = 0$.

Решаем укороченную (конечную) систему l уравнений с l неизвестными. Значения неизвестных получаются выраженными через коэффициент b_1 , который определяется подстановкой полученных значений в первое ($n = 0$) уравнение системы (4.1).

С помощью (3.14), с учетом (3.18), по найденным значениям D_{2m-1} находим значения коэффициентов A_{2m+1} ($m = 1, 2, 3, \dots$).

Для определения неизвестных A_{2n} ($n = 0, 1, 2, \dots$) имеем две системы — (3.9) и (3.13). Так как первая из них получена из граничного условия для напряжений, а вторая — для перемещений, то при определении коэффициентов A_{2n} для вычисления напряжений будем исходить из (3.9), а при определении этих коэффициентов для вычисления перемещений — из (3.13).

Приведем значения коэффициентов b_1 и A_{2m+1} , вычисленные для случаев, когда число уравнений укороченной системы равно соответственно 3, 7, 10 (табл. 1).

Коэффициенты A_{2n} , вычисленные из системы (3.9), имеют следующие значения (табл. 2).

Таблица 1

| в долях $\frac{1}{n^2} b_1$ | Таблица 1 | | |
|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| | $l=3$ | $l=7$ | $l=10$ |
| b_1/R | +1,234763 | +1,243413 | +1,245655 |
| A_3 | +0,159286 | +0,178222 | +0,183176 |
| A_5 | -0,105869 | -0,136496 | -0,143918 |
| A_7 | +0,060964 | +0,107084 | +0,116852 |
| A_9 | | -0,084753 | -0,097087 |
| A_{11} | | +0,066063 | +0,081483 |
| A_{13} | | -0,048780 | -0,068357 |
| A_{15} | | +0,030340 | -0,056687 |
| A_{17} | | | -0,045710 |
| A_{19} | | | +0,034629 |
| A_{21} | | | -0,021979 |

Таблица 2

| в долях $\frac{1}{n^2} b_1$ | Таблица 2 | | |
|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| | $l=3$ | $l=7$ | $l=10$ |
| A_0 | -0,947174 | -0,921567 | -0,911303 |
| A_2 | -0,165855 | -0,226776 | -0,249830 |
| A_4 | +0,004434 | +0,060024 | +0,081401 |
| A_6 | -0,042009 | -0,010810 | -0,031231 |
| A_8 | | -0,013635 | +0,006097 |
| A_{10} | | +0,028499 | +0,009309 |
| A_{12} | | -0,038586 | -0,019836 |
| A_{14} | | +0,045918 | +0,027534 |
| A_{16} | | | -0,033433 |
| A_{18} | | | +0,038113 |
| A_{20} | | | -0,041923 |

Коэффициенты A_{2n} , вычисленные с помощью b_1 и A_{2m+1} из системы (3.13), сведены в табл. 3.

Таблица 3

| в долях "р" | $l=3$ | $l=7$ | $l=10$ |
|----------------|-----------|-----------|-----------|
| A_0 | -0,813757 | -0,826839 | -0,830525 |
| A_2 | -0,432690 | -0,416233 | -0,411387 |
| A_4 | +0,271269 | +0,249482 | +0,242956 |
| A_6 | -0,224827 | -0,200267 | -0,192784 |
| A_8 | | +0,175825 | +0,167648 |
| A_{10} | | -0,160948 | -0,152244 |
| A_{12} | | +0,150865 | +0,141720 |
| A_{14} | | -0,143542 | -0,134023 |
| A_{16} | | | +0,127470 |
| A_{18} | | | -0,123442 |
| A_{20} | | | +0,119632 |

2. Определение напряжений и деформаций

Формула для определения напряжения σ_r на контуре имеет вид

$$\sigma_r|_{r=R} = A_0 + \sum_{k=2}^{\infty} A_k \cos k\theta. \quad (5.1)$$

Подставляя A_{2m+1} из табл. 1 и A_{2n} из табл. 2 в (5.1), определим значения этой функции при различных значениях угла θ . Результаты этих вычислений сведены в табл. 4.

Формула (2.6) для определения смещения u на контуре принимает вид

$$2\mu u|_{r=R} = -b_1 \cos \theta + A_0 R + R \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k-1}{k^2-1} A_k \cos k\theta. \quad (5.2)$$

Подставив A_{2m+1} из табл. 1 и A_{2n} из табл. 3 в (5.2), вычислим значения $2\mu u$ в различных точках контура и результаты сведем в табл. 5.

Используя симметрию задачи относительно оси x , по данным табл. 4 и 5 строим эпюры напряжений σ_r и перемещений u (фиг. 2).

Как видно из эпюр, при числе уравнений $l=10$ укороченной системы, граничные условия удовлетворены с достаточной степенью точности.

Таблица 4

| №№ | θ | $\frac{\sigma_r}{p}$ при $l=3$ | $\frac{\sigma_r}{p}$ при $l=7$ | $\frac{\sigma_r}{p}$ при $l=10$ |
|----|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| | | | | |
| 1 | 0 | -0,952204 | -0,965253 | -1,029326 |
| 2 | π | -1,180966 | -1,188613 | -1,220878 |
| 3 | $\frac{\pi}{2}$ | -0,818895 | -0,750595 | -0,712892 |
| 4 | $\frac{\pi}{2} \pm 5^\circ$ | -0,695117 | -0,343436 | -0,052276 |
| 5 | | -0,936989 | -1,049028 | -1,109530 |
| 6 | $\frac{\pi}{2} \pm 10^\circ$ | -0,590901 | -0,106366 | +0,100982 |
| 7 | | -1,026961 | -1,093700 | -1,012896 |
| 8 | $\frac{\pi}{2} \pm 13^\circ$ | -0,546963 | -0,116119 | -0,108157 |
| 9 | | -1,061257 | -1,035447 | -0,933445 |
| 10 | $\frac{\pi}{2} \pm 15^\circ$ | -0,527540 | -0,181055 | -0,289561 |
| 11 | | -1,075104 | -0,989563 | -0,930025 |
| 12 | $\frac{\pi}{2} \pm 20^\circ$ | -0,516954 | -0,451095 | -0,526368 |
| 13 | | -1,079742 | -0,932741 | -0,970238 |
| 14 | $\frac{\pi}{2} \pm 25^\circ$ | -0,559058 | -0,690110 | -0,615821 |
| 15 | | -1,050850 | -0,984964 | -1,034123 |
| 16 | $\frac{\pi}{2} \pm 30^\circ$ | -0,642716 | -0,788105 | -0,690538 |
| 17 | | -1,006194 | -1,047851 | -0,957142 |
| 18 | $\frac{\pi}{2} \pm 45^\circ$ | -0,956944 | -0,952158 | -0,934033 |
| 19 | | -0,946279 | -0,961122 | -0,982529 |
| 20 | $\frac{\pi}{2} \pm 60^\circ$ | -1,113216 | -1,089156 | -1,094989 |
| 21 | | -1,035438 | -1,008276 | -1,006181 |

Сравнение эпюр напряжений и смещений при переходе от $l=3$ к $l=7$ и, наконец, к $l=10$ дает все основания заключить, что с увеличением числа уравнений l укороченной системы точность удовлетворения граничных условий очень быстро возрастает.

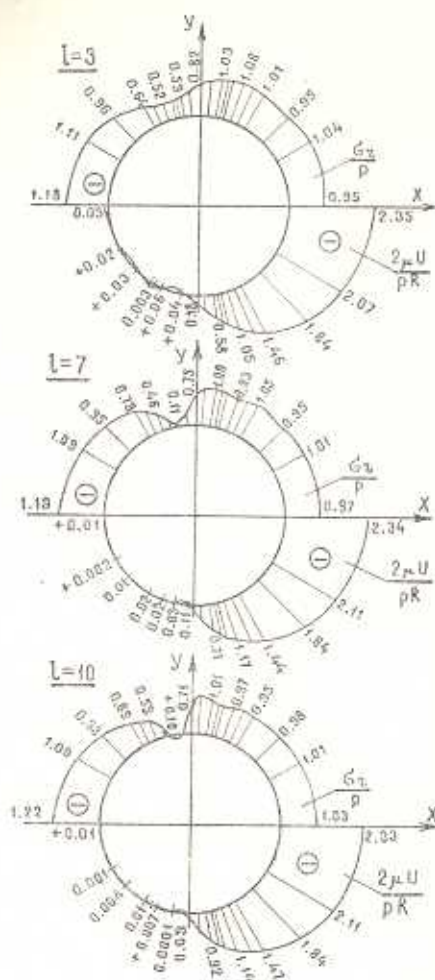
Перейдем к определению напряжений внутри области. Предварительно, пользуясь (3.2) и (3.4), с учетом (3.1), выразим напряжения через коэффициенты A_k

$$\sigma_r = A_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(k - 2 - k \frac{R^2}{r^2} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^k A_k \cos k\theta, \quad (5.3)$$

$$\sigma_\theta = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(k + 2 - k \frac{R^2}{r^2} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^k A_k \cos k\theta, \quad (5.4)$$

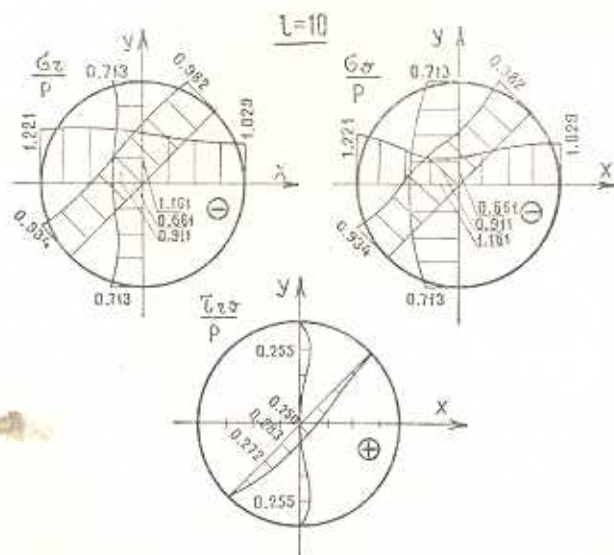
$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^k A_k \sin k\theta, \quad (5.5)$$

Результаты вычислений по этим формулам при числе уравнений укороченной системы $l=10$ сведены в табл. 6.



Фиг. 2.

| №№ | θ | $\frac{2\mu U}{pR}$ при | $\frac{2\mu U}{pR}$ при | $\frac{2\mu U}{pR}$ при |
|----|----------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | | $l=3$ | $l=7$ | $l=10$ |
| 1 | 0 | -2,348914 | -2,338212 | -2,326797 |
| 2 | " | -0,032116 | -0,010236 | -0,006049 |
| 3 | $\frac{\pi}{2}$ | -0,183815 | -0,114348 | -0,094118 |
| 4 | $\frac{\pi}{2} + 5^\circ$ | -0,047852 | +0,025889 | +0,033871 |
| 5 | $\frac{\pi}{2} + 10^\circ$ | -0,367126 | -0,390213 | -0,431089 |
| 6 | " | -0,035264 | +0,033973 | -0,000088 |
| 7 | $\frac{\pi}{2} + 13^\circ$ | -0,584980 | -0,714981 | -0,778872 |
| 8 | " | -0,060670 | +0,008585 | -0,018693 |
| 9 | $\frac{\pi}{2} + 15^\circ$ | -0,725132 | -0,888547 | -0,920815 |
| 10 | " | -0,068535 | -0,008206 | -0,017028 |
| 11 | $\frac{\pi}{2} + 20^\circ$ | 0,820011 | -0,986426 | -0,990154 |
| 12 | " | +0,062596 | -0,023482 | +0,007407 |
| 13 | $\frac{\pi}{2} + 25^\circ$ | -1,053888 | -1,169094 | -1,141267 |
| 14 | " | +0,033153 | -0,002069 | +0,006598 |
| 15 | $\frac{\pi}{2} + 30^\circ$ | -1,270763 | -1,302355 | -1,312930 |
| 16 | " | -0,002837 | -0,016795 | -0,010427 |
| 17 | $\frac{\pi}{2} + 35^\circ$ | -1,459899 | -1,439115 | -1,474285 |
| 18 | " | +0,033808 | -0,011375 | -0,004690 |
| 19 | $\frac{\pi}{2} + 45^\circ$ | -1,844110 | -1,839957 | -1,841270 |
| 20 | " | -0,026521 | -0,001618 | +0,000856 |
| 21 | $\frac{\pi}{2} + 60^\circ$ | -2,071997 | -2,106174 | -2,108040 |



Фиг. 3.

Таблица 6

| θ | в долях "π" | $r=0$ | $r=\frac{R}{4}$ | $r=\frac{R}{2}$ | $r=\frac{3R}{4}$ | $r=R$ |
|------------------|------------------|-----------|-----------------|-----------------|------------------|-----------|
| 0 | σ_r | -1,161133 | -1,089412 | -1,033980 | -1,007268 | 1,029326 |
| | σ_θ | -0,661473 | -0,758344 | -0,855952 | -0,946998 | -1,029326 |
| | $\tau_{r\theta}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{4}$ | σ_r | -0,911303 | -0,964637 | -1,003396 | -1,006342 | -0,982529 |
| | σ_θ | -0,911303 | 0,862442 | 0,854350 | -0,917058 | -0,982529 |
| | $\tau_{r\theta}$ | +0,249830 | 0,184891 | +0,094207 | +0,020453 | 0 |
| $\frac{\pi}{2}$ | σ_r | -0,661473 | -0,670974 | -0,620944 | -0,589208 | -0,712892 |
| | σ_θ | -1,161133 | -1,139464 | -1,065567 | -0,893145 | -0,712892 |
| | $\tau_{r\theta}$ | 0 | +0,070069 | +0,149772 | -0,255407 | 0 |
| $\frac{3\pi}{4}$ | σ_r | -0,911303 | -0,857431 | -0,889632 | -0,938270 | -0,934033 |
| | σ_θ | -0,911303 | -0,941732 | -0,918044 | -0,882418 | -0,934033 |
| | $\tau_{r\theta}$ | +0,249830 | -0,282853 | +0,271553 | -0,170465 | 0 |
| π | σ_r | -1,161133 | -1,213828 | -1,226020 | -1,214804 | -1,220878 |
| | σ_θ | -0,661473 | -0,644844 | -0,750550 | -0,954496 | -1,220878 |
| | $\tau_{r\theta}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Как видно из (5.3) и (5.4), на контуре $\sigma_r = \sigma_\theta$ и, следовательно, их эпюры на контуре совпадают.

По данным табл. 6 строим эпюры напряжений (фиг. 3).

В заключение заметим, что аналогично можно решить эту задачу при любом другом законе распределения (симметрично относительно оси x) нагрузки, если порядок свободных членов будет не ниже $\frac{1}{n^2}$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 6 V 1965

Վ. Ք. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՋԳԱՆԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՀԱՐԹ ԽԵՒՐԻ ՄԱՍԻՆ՝
ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Հոդվածում դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիր շրջանային տիրույթի համար, երբ նրա եզրագծի կեսում $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ կիրառված են հալասարաչափ բաշխված նորմալ լարումներ, իսկ մյուս կեսում $\left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\right)$ բացակայում են նորմալ տեղափոխումները, ամբողջ եզրագծում շոշափող լարումները հալասար են զրոյի:

անդիրք բերվում է զծային հանրահաշվական անվերջ հավասարումների սխեմաների լուծմանը: Ապացուցվում է ստացված անվերջ սխեմանի ռեզուլյարությունը Պուասսոնի զործակցի ցանկացած արժեքի համար: Լուծված է թվային օրինակ Պուասսոնի զործակցի զրո արժեքի համար և կառուցված են լարումների ու նորմալ տեղափոխումների էպյուրաները և դրազծում և լարումների էպյուրաները՝ տիրույթում:

Անվերջ հավասարումների սխեմանից ստացված 10 անհայտով 10 հավասարումների կրճատված սխեմանի լուծումը տայիս է ևզրային պայմանների լավ բավարարում:

Նշվում է, որ նույն ձևով խնդիրը կարելի է լուծել չառանցքի նկատմամբ սիմետրիկ ցանկացած բևեի դեպքում, երբ ազատ անդամների կարգը գերազանցում է $\frac{1}{n^2}$:

V. G. SAHAKIAN

A MIXED PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A CIRCULAR FIELD

Summary

This paper deals with the plain problem of the theory of elasticity with mixed boundary conditions for a circular field, when on one part $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ uniformly distributed normal stresses act and on the other parts $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}$ normal strains are absent, while sheering forces on the whole boundary are absent.

The solution of this problem is reduced to an infinite set of algebraical linear equations, which are regular and the order of free members surpasses $\frac{1}{n^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. *Канторович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М.—Л., 1962.
3. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости со смешанными предельными условиями. Труды Сейсмология, ин-та АН СССР, № 88, 1938.
4. *Шерман Д. И.* Смешанная задача статической теории упругости для плоских многосвязных областей. ДАН СССР, 28, № 1, 1940, стр. 29—32.
5. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. Изд. «Высшая школа», М., 1962.
6. *Карпетян М. Е.* Об одной смешанной задаче теории упругости для круга. Сборник научн. тр., Арм. сельск.-хоз. ин-т, № 12, 1962, стр. 457—460.
7. *Грэдштейн И. С. и Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.