ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, 1966, № 1 Механика

А. М. ДАТКАЕВ, М. И. РОЗОВСКИЙ

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ И ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. Рассмотрим линейное нормированное пространство D линейных ограниченных операторов, переводящих пространство Банаха (B-пространство) в себя. В силу теоремы 1 (1, V) [1] пространство D является полным нормированным пространством (B-пространством) с нормой

$$\|\overset{*}{K}\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|\overset{*}{K}\varphi\| \qquad (\varphi \in B).$$

Пусть элементами пространства D являются интегральные операторы типа Вольтерра с непрерывными или слабо сингулярными ядрами. Теория как одномерных, так и многомерных интегральных операторов, а также практические методы решения соответствующих интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с непрерывными и слабо сингулярными ядрами полностью совпадают, ввиду чего мы будем рассматривать одномерный случай—временные интегральные операторы типа Вольтерра, имеющие широкое применение в теории наследственной ползучести.

Под произведением двух интегральных операторов типа Вольтерра

$$\begin{aligned} \overset{*}{K}_{(1)}\varphi(T, t) &= \int_0^t K_{(1)}(T; t, \tau)\, \varphi(T, \tau)\, d\tau, \\ \overset{*}{K}_{(2)}\varphi(T, t) &= \int_0^t K_{(2)}(T; t, \tau)\, \varphi(T, \tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где t, τ изменяются в треугольной области k_0 $(0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1)$, а пространственная точка T — в некоторой области Q, будем понимать новый оператор $\overset{*}{K}_{(1)} \cdot \overset{*}{K}_{(2)}$ с ядром

$$K_{(1)} \cdot K_{(2)} = \int_\tau^t K_{(1)}(T; t, s)\, K_{(2)}(T; s, \tau)\, ds, \tag{1.2}$$

причем $\overset{*}{K}_{(1)} \cdot \overset{*}{K}_{(2)} \in D$ и $\|\overset{*}{K}_{(1)} \cdot \overset{*}{K}_{(2)}\| \leqslant \|\overset{*}{K}_{(1)}\| \|\overset{*}{K}_{(2)}\|$.

Здесь и в дальнейшем символы $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(1)} \cdot K_{(2)}$, употребляемые без звездочек, обозначают ядра соответствующих операторов.

Если операторы $\overset{*}{K}_{(1)} = \overset{*}{K}_{(2)} = \overset{*}{K}$, то $\overset{*}{K}_{(1)} \cdot \overset{*}{K}_{(2)} = \overset{*}{K}{}^2$. Аналогично определяются более высокие „степени" оператора

$$\overset{*}{K}{}^n = \overset{*}{K} \cdot \overset{*}{K}{}^{n-1} = \overset{*}{K}{}^l \cdot \overset{*}{K}{}^m = \underbrace{\overset{*}{K} \cdot \overset{*}{K} \cdots \overset{*}{K}}_{n} \quad (l + m = n;\ n = 1, 2, \cdots),$$

причем

$$\| \overset{*}{K}{}^n \| \leqslant \| \overset{*}{K} \|^n. \tag{1.3}$$

Следовательно, операторы $\overset{*}{K}{}^n$, также как $\overset{*}{K}$, суть интегральные и в силу (1.3) линейные ограниченные, причем ядра имеют вид:

$$K_1(T;\ t,\ \tau) = K(T;\ t,\ \tau), \qquad K_n(T;\ t,\ \tau) = \int_\tau^t K_{n-1}(T;\ t,\ s)\, K_1(T;\ s,\ \tau)\, ds =$$

$$= \int_\tau^t K_1(T;\ t,\ s)\, K_{n-1}(T;\ s,\ \tau)\, ds = \int_\tau^t K_l(T;\ t,\ s)\, K_m(T;\ s,\ \tau)\, ds. \tag{1.4}$$

Таким образом, определив операцию умножения в D, получим полное нормированное кольцо R. Кольцо обладает единицей, роль которой играет тождественный оператор.

Операция умножения в кольце R в общем не коммутативна. Операторы, обладающие свойством коммутативности, т. е. $\overset{*}{K}_{(i)} \cdot \overset{*}{K}_{(j)} = \overset{*}{K}_{(j)} \cdot \overset{*}{K}_{(i)}$, будем называть перестановочными между собой.

Следуя Я. В. Быкову [2], выражение вида

$$\sum_{\alpha,\, \beta, \cdots,\, \gamma}^{m_\alpha, \cdots,\, m_\gamma} a_{\alpha\beta\cdots\gamma} \overset{*}{K}{}^{\alpha}_{(1)} \overset{*}{K}{}^{\beta}_{(2)} \cdots \overset{*}{K}{}^{\gamma}_{(n)}, \tag{1.5}$$

где $a_{\alpha\beta\cdots\gamma}$ — постоянные коэффициенты, назовем полиномом от операторов $\overset{*}{K}_{(1)}, \overset{*}{K}_{(2)}, \cdots, \overset{*}{K}_{(n)}$, причем $a_{00\cdots 0}$ вообще отличен от нуля.

Операция умножения в кольце R обладает свойствами ассоциативности и дистрибутивности. На основании этого легко доказывается

Теорема 1. *Если операторы $\overset{*}{K}_{(i)}$ $(i = 1,\ 2, \cdots,\ n)$ перестановочны между собой, то всевозможные их произведения перестановочны между собой и с исходными операторами.*

Следствие 1. *Всевозможные полиномы от перестановочных операторов перестановочны между собой и с исходными операторами.*

Следствие 2. *Произведение и частное (и с остатком) от перестановочных полиномов можно подсчитать по правилу умножения и деления обычных полиномов.*

Следствие 3. *Операторный полином от операторных полиномов (от перестановочных операторов) подсчитывается по тем же правилам, как и для обычных полиномов.*

Оператор

$$\overset{*}{R}(\lambda)=\overset{*}{K}+\lambda\overset{*}{K}{}^2+\lambda^2\overset{*}{K}{}^3+\cdots\lambda^n\overset{*}{K}{}^{n+1}+\cdots, \qquad (1.6)$$

ядро которого есть резольвента ядра исходного оператора $\overset{*}{K}$, назовем оператор—резольвентой, а ряд справа—операторным рядом. Если разложить функцию $f(x)=(1-x)^{-1}$ по степеням x, и в разложение вместо x подставить оператор $\lambda\overset{*}{K}$, получим оператор $1+\lambda\overset{*}{R}(\lambda)$, называемый обращением оператора $(1-\lambda\overset{*}{K})^{-1}$.

Известно [1], что ряд (1.6) сходится (по норме) для всех

$$|\lambda|<\frac{1}{d}, \qquad d=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|\overset{*}{K}{}^n\|}\,.$$

В случае операторов типа Вольтерра с ядрами из пространств C, M $d\to 0$ и потому ряд (1.6) сходится при любых конечных λ.

Следовательно, операторный ряд (1.6) сходится абсолютно и равномерно в B-пространствах C, M, L на всем конечном отрезке λ и t, $\tau\in k_0$. Обобщением является следующая

Теорема 2. *Если ряд*

$$\sum a_{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n} l_1^{\gamma_1} l_2^{\gamma_2}\cdots l_n^{\gamma_n}$$

сходится при некотором $|l_i|\leqslant c_i$ $(i=1, 2,\cdots, n)$, *то операторный ряд типа Вольтерра*

$$\sum a_{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}\overset{*}{K}{}_{(1)}^{\gamma_1} f_1^{\gamma_1}\overset{*}{K}{}_{(2)}^{\gamma_2} f_2^{\gamma_2}\cdots\overset{*}{K}{}_{(n)}^{\gamma_n} f_n^{\gamma_n}, \qquad (1.7)$$

где $f_1(T, t)$, $f_2(T, t),\cdots, f_n(T, t)$ — *ограниченные измеримые функции, сходится абсолютно и равномерно в пространствах* C, M, L *в любой ограниченной области.*

Следствие 1. *Сходящиеся „степенные" интегрально-операторные ряды можно почленно складывать, вычитать и перемножать, причем результаты вновь располагаются по „степеням" оператора, т. е.*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overset{*}{K}{}^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_n\overset{*}{K}{}^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)\overset{*}{K}{}^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overset{*}{K}{}^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n\overset{*}{K}{}^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)\overset{*}{K}{}^n. \qquad (1.8)$$

Отсюда ясно, что „степенные" операторные ряды вида (1.6) можно возводить в степень с любым натуральным показателем m, причем результат представляется также в виде ряда по „степеням" оператора, т. е.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \overset{*}{K}{}^n\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)} \overset{*}{K}{}^n, \tag{1.9}$$

где коэффициенты $C_n^{(m)}$ получаются из c_n с помощью сложения и умножения.

Следствие 2. *Пусть имеем абсолютно и равномерно сходящийся на любой ограниченной области операторный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{*}{R}{}^n = a_0 + a_1 \overset{*}{R} + a_2 \overset{*}{R}{}^2 + \cdots \tag{1.10}$$

и пусть оператор $\overset{*}{R}$, *в свою очередь, представляется в виде сходящегося при* $\|\overset{*}{K}\| \leqslant c$ *операторного ряда*

$$\overset{*}{R} = b_0 + b_1 \overset{*}{K} + b_2 \overset{*}{K}{}^2 + \cdots. \tag{1.11}$$

Тогда имеет смысл подстановка ряда (1.11) в (1.10), причем, производя все возведения в „степень" согласно (1.9) и объединив затем подобные члены, получим ряд по „степеням" $\overset{*}{K}$, *сходящийся при* $\|\overset{*}{K}\| \leqslant c$.

Следствие 3. *Если имеем абсолютно и равномерно сходящийся на любой ограниченной области операторный ряд*

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{*}{K}{}^n, \tag{1.12}$$

то обращение операторного выражения

$$(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \cdots \tag{1.13}$$

определяется подстановкой (1.12) в (1.13) согласно следствию 2, причем новый „степенной" операторный ряд будет сходящимся абсолютно и равномерно на любой ограниченной области.

§ 2. Решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений неследственной теории ползучести интегрально-операторным (символическим) методом (см. [3]—[8]) приводит к рассмотрению операторных и операторно-дифференциальных уравнений следующих видов:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, t, f_1, \cdots, f_s, \varphi, \overset{*}{K}_{(1)}, \overset{*}{K}_{(2)}, \cdots, \overset{*}{K}_{(m)}) = 0; \tag{2.1}$$

$$\Phi\left(x_1, \cdots, x_n, t, f_1, \cdots, f_s, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_{n+1}}\varphi}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}\,\partial t^{p_{n+1}}},\right.$$

$$\left.\overset{*}{K}_{(1)}, \cdots, \overset{*}{K}_{(m)}\right) = 0, \tag{2.2}$$

где $f_1(T, t)$, $f_2(T, t), \cdots, f_s(T, t)$ — известные измеримые ограниченные функции. Уравнения (2.1), (2.2) называются линейными, если искомая функция $\varphi(T, t)$ и ее производные входят в них линейно.

Отметим, что уравнения (2.1) и (2.2) предполагаются не содержащими нелинейности вида

$$\overset{*}{K} f(T, t)\,\varphi(T, t) = \int_0^t K(T;\, t, \tau) f(T, \tau)\,\varphi(T, \tau)\,dt,$$

$$\overset{*}{K} \varphi(T, t)\,t = \int_0^t K(T;\, t, \tau)\,\varphi(T, \tau)\,\tau d\tau.$$

Частными видами уравнений (2.1), (2.2) являются линейные, нелинейные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения наследственной теории ползучести [5]—[10].

Теорема 3. *Пусть 1) функция*

$$\psi[x_1, \cdots, x_n, t, f_1(T, t), \cdots, f_s(T, t), \varphi(T, t), \lambda_1, \cdots, \lambda_m] \qquad (2.3)$$

является голоморфной при $|\lambda_i| \leqslant c_i$ *и целой относительно остальных аргументов;*

2) $\overset{*}{K}_{(1)}, \overset{*}{K}_{(2)}, \cdots, \overset{*}{K}_{(m)}$ — *перестановочные между собой операторы кольца* R.

Если уравнение

$$\psi[x_1, \cdots, x_n, t, f_1(T, t), \cdots, f_s(T, t), \varphi(T, t), \lambda_1, \cdots, \lambda_m] = 0 \qquad (2.4)$$

имеет голоморфное при $|\lambda_i| \leqslant c_i'$ *решение*

$$\varphi = \varphi[x_1, \cdots, x_n, t, f_1(T, t), \cdots, f_s(T, t), \lambda_1, \cdots, \lambda_m], \qquad (2.5)$$

то в любой ограниченной области операторная функция

$$\varphi = \varphi[x_1, \cdots, x_n, t, f_1(T, t), \cdots, f_s(T, t), \overset{*}{K}_{(1)}, \cdots, \overset{*}{K}_{(m)}] \qquad (2.6)$$

образует решение операторного уравнения.

Действительно, после подстановки сходящегося при $|\lambda_i| \leqslant c_i'$ ряда

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n, t, f_1, \cdots, f_s, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) =$$
$$= \sum a_{\alpha\cdots\beta\gamma\delta\cdots\eta\cdots\mu} x_1^{\alpha} \cdots x_n^{\beta} t^{\gamma} f_1^{\delta} \cdots f_s^{\varepsilon} \lambda_1^{\eta} \cdots \lambda_m^{\mu} \qquad (2.7)$$

в разложение функции (2.3) получим

$$\sum A_{\alpha\cdots\beta\gamma\delta\cdots\eta\cdots\mu} x_1^{\alpha} \cdots x_n^{\beta} t^{\gamma} f_1^{\delta} \cdots f_s^{\varepsilon} \lambda_1^{\eta} \cdots \lambda_m^{\mu} \equiv 0. \qquad (2.8)$$

Так как (2.7) является решением уравнения (2.4), будем иметь

$$A_{\alpha\cdots\beta\gamma\delta\cdots\eta\cdots\mu} = 0.$$

Тогда в силу следствий теорем 1 и 2 получим

$$F \equiv \sum A_{\alpha\cdots\beta\gamma\delta\cdots\eta\cdots\mu} x_1^{\alpha} \cdots x_n^{\beta} t^{\gamma} f_1^{\delta} \cdots f_s^{\varepsilon} \overset{*}{K}{}_{(1)}^{\eta} \cdots \overset{*}{K}{}_{(m)}^{\mu} = 0.$$

Это и доказывает, что операторный ряд, соответствующий операторной функции (2.6), т. е.

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n, t, f_1, \cdots, f_s, \overset{*}{K}_{(1)}, \cdots, \overset{*}{K}_{(m)}) =$$

$$= \sum a_{\alpha_1 \cdots \beta \gamma_1 \cdots \gamma_s \mu_1 \cdots \mu_m} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} t^{\beta} f_1^{\gamma_1} \cdots f_s^{\gamma_s} \overset{*}{K}_{(1)}^{\mu_1} \cdots \overset{*}{K}_{(m)}^{\mu_m} \tag{2.9}$$

является решением операторного уравнения (2.1).

Аналогично доказывается следующая

Теорема 4. *Пусть 1) функция*

$$\psi\left[x_1, \cdots, x_n, t, f_1(T, t), \cdots, f_s(T, t), \varphi(T, t), \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots, \right.$$

$$\left. \frac{\partial^{\rho_1 + \cdots + \rho_{n+1}}\varphi}{\partial x_1^{\rho_1} \cdots \partial x_n^{\rho_n} \partial t^{\rho_{n+1}}}, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \right], \tag{2.10}$$

где λ_i — параметры, не зависящие от T и t, является голоморфной при $|\lambda_i| \leqslant c_i$ и целой относительно всех остальных аргументов.

2) $\overset{*}{K}_{(1)}, \overset{*}{K}_{(2)}, \cdots, \overset{*}{K}_{(m)}$ — операторы кольца R, перестановочные между собой и с дифференциальными операторами в некотором классе функций $D_0 \subset B$.

Если дифференциальное уравнение

$$\psi\left[x_1, \cdots, x_n, t, f_1(T, t), \cdots, f_s(T, t), \varphi(T, t), \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots, \right.$$

$$\left. \frac{\partial^{\rho_1 + \cdots + \rho_{n+1}}\varphi}{\partial x_1^{\rho_1} \cdots \partial x_n^{\rho_n} \partial t^{\rho_{n+1}}}, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \right] = 0 \tag{2.11}$$

имеет голоморфное при $|\lambda_i| \leqslant c_i'$ решение

$$\varphi(T, t) = \varphi[x_1, \cdots, x_n, t, f_1(T, t), \cdots, f_s(T, t), \lambda_1, \cdots, \lambda_m, \varkappa_1, \cdots, \varkappa_l], \tag{2.12}$$

где $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_l$ — новые параметры, причем в разложении по степеням λ_i, сомножители последних принадлежат D_0, то в любой ограниченной области операторная функция

$$\varphi(T, t) = \varphi[x_1, \cdots, x_n, t, f_1(T, t), \cdots, f_s(T, t), \overset{*}{K}_{(1)}, \cdots, \overset{*}{K}_{(m)}, \varkappa_1, \cdots, \varkappa_l] \tag{2.13}$$

образует решение операторно-дифференциального уравнения (2.2).

Если решение (2.12) является голоморфным и при $|\varkappa_i| \leqslant d_i$, причем в разложении по степеням $\varkappa_i$ сомножители последних принадлежат классу D_0, то операторная функция

$$\varphi(T, t) =$$

$$= \varphi[x_1, \cdots, x_n, t, f_1(T, t), \cdots, f_s(T, t), \overset{*}{K}_{(1)}, \cdots, \overset{*}{K}_{(m)}, \overset{*}{H}_{(1)}, \cdots, \overset{*}{H}_{(l)}],$$

где $\overset{*}{H}_{(1)}, \cdots, \overset{*}{H}_{(l)}$ — операторы кольца R, перестановочные между собой, с операторами $\overset{*}{K}_{(i)}$ и с дифференциальными операторами в классе функции D_0, также образует решение операторно-дифференциального уравнения (2.2), сходящееся абсолютно и равномерно на любой ограниченной области в пространствах C, M, L.

Аналогичные теоремы имеют место относительно систем операторных и операторно-дифференциальных уравнений.

Отметим, что все рассмотренные операторные ряды вида (1.7), соответствующие некоторым операторным функциям, в случае L_2 — ядер [11] и ограниченных измеримых $f_1, \cdots, f_s$, φ сходятся (абсолютно) почти всюду. Такие ряды в силу теоремы Егорова-Северини [12] при определенных условиях становятся равномерно сходящимися, потому их называют почти равномерно сходящимися в пространстве L_2.

Так как интегральные операторы типа Вольтерра являются операторами сжатия, то существование и единственность решений операторных и операторно-дифференциальных уравнений, построенных методом теорем 3 и 4, в силу теоремы Банаха [13] обеспечены.

Построение приближенного решения методом теорем 3 и 4 является обобщением метода последовательных приближений при решении линейных, нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, т. е. обобщением так называемого принципа Вольтерра [3], развитым Ю. Н. Работновым, Я. В. Быковым [2] и одним из авторов.

Если уравнения (2.1), (2.2) являются линейными и левые части — целыми относительно всех аргументов, то вышеуказанный метод совпадает с методом построения решений линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, данным в работе [2] Я. В. Быковым. В той же работе [2] также дан аналогичный метод построения решений систем нелинейных операторных и операторно-дифференциальных уравнений, основанный на теории композиций функций. Различный подход к построению решений операторных уравнений предопределяет различные условия, налагаемые как на уравнения, так и на функции, входящие в них. Следовательно, метод построения решений операторных и операторнодифференциальных уравнений, основанный на теории композиционных функций, и изложенный интегрально-операторный метод, совпадая по идее, дополняют друг друга.

§ 3. При решении интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории ползучести (2.1), (2.2) методом теорем 3 и 4 трудность заключается в расшифровке операторных функций и различных алгебраических операторных выражений, входящих в них.

Пусть имеем интегрально-операторное уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{*}{K}{}^n \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \overset{*}{K}{}^n f(t), \tag{3.1}$$

где $f(t)$, $\varphi(t)$ — известная и искомая функции.

Ядро $K(t, \tau)$ предполагается непрерывным или слабо сингулярным.

Решение (3.1) в операторной форме имеет вид

$$\varphi(t)=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\overset{*}{K}{}^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overset{*}{K}{}^n\Big)^{-1}f(t). \tag{3.2}$$

Согласно теореме 3 оператор $\overset{*}{K}$ следует заменить параметром и получить обращение выражения (3.2). Для простоты будем считать $\overset{*}{K}$ параметром.

Обращение ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overset{*}{K}{}^n=a_0\left(1+\frac{a_1}{a_0}\overset{*}{K}+\cdots+\frac{a_n}{a_0}\overset{*}{K}{}^n+\cdots\right)=a_0(1+z) \tag{3.3}$$

согласно следствию 3 теоремы 2 представится в виде ряда

$$c_0+c_1\overset{*}{K}+c\overset{*}{K}{}^2+\cdots+c_n\overset{*}{K}{}^n+\cdots. \tag{3.4}$$

Далее в силу следствия 2 теоремы 2 будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n\overset{*}{K}{}^n\sum_{n=0}^{\infty}c_n\overset{*}{K}{}^n=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\overset{*}{K}{}^n. \tag{3.5}$$

Коэффициенты последнего ряда определяются по методу неопределенных коэффициентов, исходя из соотношения

$$(a_0+a_1\overset{*}{K}+a_2\overset{*}{K}{}^2+\cdots)(d_0+d_1\overset{*}{K}+d_2\overset{*}{K}{}^2+\cdots)=b_0+b_1\overset{*}{K}+b_2\overset{*}{K}{}^2+\cdots \tag{3.6}$$

Так как $a_0\neq 0$, то будем иметь

$$d_0=\frac{b_0}{a_0},\qquad d_1=\frac{a_0b_1-a_1b_0}{a_0^2},\cdots$$

и решением операторного уравнения (3.1) будет

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\overset{*}{K}{}^nf(t).$$

Отметим, что требование $a_0\neq 0$ следует из условия теоремы 3, ибо в противном случае операторное выражение

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overset{*}{K}{}^n\right)^{-1}=(a_1\overset{*}{K}+a_2\overset{*}{K}{}^2+\cdots)^{-1}=z_1^{-1}$$

не является голоморфным в окрестности начала координат $z_1=0$.

Пусть F — линейное множество всех вещественных функций $f(t)$, заданных на произвольном множестве $\{t\}$. Пусть для некоторых элементов F определено соотношение $f(t)>0$, которое означает $f(t)\geqslant 0$ при всех t и $f(t)\neq 0$. На основании этого вводится также соотношение $f(t)\geqslant\varphi(t)$, что означает при всех t $f(t)-\varphi(t)\geqslant 0$.

Линейный ограниченный интегральный оператор $\overset{*}{K}$ из пространства D, переводящий B-пространство в себя, называется положительным, если $\overset{*}{K}f(t) > 0$ для любой функции $f(t) \geqslant 0$ из B. Отсюда $\overset{*}{K}_{(1)}f(t) \geqslant \overset{*}{K}_{(2)}f(t)$, если для любой $f(t) > 0$ из B $\overset{*}{K}_{(1)}f - \overset{*}{K}_{(2)}f \geqslant 0$. Пространство D линейных ограниченных операторов в силу указанного упорядочения его элементов будет полуупорядоченным KB-пространством [14].

Линейные ограниченные операторы вполне определяются своими значениями для положительных $f(t)$, т. е. если $\overset{*}{K}_{(1)}f(t) = \overset{*}{K}_{(2)}f(t)$ для $f(t) \geqslant 0$, то $\overset{*}{K}_{(1)}f(t) = \overset{*}{K}_{(2)}f(t)$ для всех $f(t)$.

Из $f_1(t) \geqslant f_2(t)$ для положительных и аддитивных операторов следует

$$\overset{*}{K}f_1(t) \geqslant \overset{*}{K}f_2(t). \tag{3.7}$$

Отметим, что пространство D линейных ограниченных интегральных операторов типа Вольтерра является пространством регулярных операторов.

В отличие от произведения операторов в смысле операции умножения в кольце R обычное произведение интегральных операторов, как произведение функций, будем обозначать $[\overset{*}{K}_{(i)}][\overset{*}{K}_{(j)}]$. Аналогично $[\overset{*}{K}]^n$ обозначает обычную n-ую степень оператора $\overset{*}{K}$, воздействующего на единицу.

Выясним соотношение между $\overset{*}{K}{}^n$ и $[\overset{*}{K}]^n$, где $\overset{*}{K}$ — интегральный временной оператор типа Вольтерра из кольца R. Очевидно, для операторов типа Вольтерра с ядрами, равными единице при всех t из $k_0 (0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1)$, выполняется неравенство

$$\overset{*}{I}{}_0^n \leqslant [\overset{*}{I}_0]^n. \tag{3.8}$$

Пусть даны интегральные операторы типа Вольтерра

$$\overset{*}{K}_{(1)} \cdot 1 = \int\limits_0^t K_{(1)}(t, \tau)\, d\tau, \cdots, \quad \overset{*}{K}_{(n)} \cdot 1 = \int\limits_0^t K_{(n)}(t, \tau)\, d\tau \tag{3.9}$$

с ограниченными ядрами

$$|K_{(1)}(t, \tau)| \leqslant c_1, \quad |K_{(2)}(t, \tau)| \leqslant c_2, \cdots, \quad |K_{(n)}(t, \tau)| \leqslant c_n.$$

Для максимальных значений ядер получим

$$|\overset{*}{K}_{(1)} \cdot \overset{*}{K}_{(2)} \cdots \overset{*}{K}_{(n)}| \leqslant c_1 \cdot c_2 \cdots c_n \overset{*}{I}{}_0^n.$$

С другой стороны,

$$|[\overset{*}{K}_{(1)}][\overset{*}{K}_{(2)}] \cdots [K_{(n)}]| \leqslant c_1 \cdot c_2 \cdots c_n [\overset{*}{I}_0]^n.$$

Следовательно, в силу (3.8) справедливо неравенство

$$|\overset{*}{K}_{(1)}\cdot\overset{*}{K}_{(2)}\cdots\overset{*}{K}_{(n)}|\leqslant|[\overset{*}{K}_{(1)}][\overset{*}{K}_{(2)}]\cdots[\overset{*}{K}_{(n)}]|.$$

Лемма. *Если регулярные интегральные операторы типа Вольтерра положительны в $k_0\,(0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_1)$, то для всех $t\leqslant s$ из k_0 имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^s K(s,\tau)\,d\tau\geqslant\int\limits_0^t K(t,\tau)\,d\tau. \tag{3.10}$$

Для $t=s$ утверждение леммы справедливо. Пусть $s-t=\eta>0$. Тогда из регулярности операторов в k_0 имеем

$$\int\limits_0^\eta K(\eta,\tau)\,d\tau=\int\limits_0^s K(s,\tau)\,d\tau-\int\limits_0^t K(t,\tau)\,d\tau,$$

т. е.

$$\int\limits_0^s K(s,\tau)\,d\tau>\int\limits_0^t K(t,\tau)\,d\tau,\quad\text{ибо}\quad\int\limits_0^\eta K(\eta,\tau)\,d\tau>0.$$

Понятно, что интегралы (3.10) предполагаются существующими.

Теорема 5. *Для любых положительных интегральных операторов типа Вольтерра (3.9) при всех $t\in k_0$ $(0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_1)$ справедливо неравенство*

$$\overset{*}{K}_{(1)}\cdot\overset{*}{K}_{(2)}\cdots\overset{*}{K}_{(n)}\leqslant[\overset{*}{K}_{(1)}][\overset{*}{K}_{(2)}]\cdots[\overset{*}{K}_{(n)}]. \tag{3.11}$$

Для $n=1$ утверждение теоремы справедливо. При $n=2$ имеем

$$\begin{aligned}\overset{*}{K}_{(1)}\cdot\overset{*}{K}_{(2)}\cdot 1&=\int\limits_0^t K_{(1)}(t,\tau)\,d\tau\int\limits_0^\tau K_{(2)}(\tau,s)\,ds,\\ [\overset{*}{K}_{(1)}][\overset{*}{K}_{(2)}]&=\int\limits_0^t K_{(1)}(t,\tau)\,d\tau\int\limits_0^t K_{(2)}(t,\tau)\,d\tau.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Так как $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_1$, то в силу леммы и неравенства (3.7) из (3.12) следует

$$\overset{*}{K}_{(1)}\cdot\overset{*}{K}_{(2)}\cdot 1\leqslant[\overset{*}{K}_{(1)}][\overset{*}{K}_{(2)}].$$

Пусть утверждение теоремы справедливо для $n-1$, тогда в силу леммы и неравенства (3.7) следует утверждение теоремы.

Следствие. *При $\overset{*}{K}_{(1)}=\overset{*}{K}_{(2)}=\cdots=\overset{*}{K}_{(n)}=\overset{*}{K}$ из (3.11) следует*

$$\overset{*}{K}{}^n\leqslant[\overset{*}{K}]^n.$$

При $\overset{*}{K}_{(1)}=\overset{*}{K}_{(2)}=\cdots=\overset{*}{K}_{(m)}=\overset{*}{K}_{\rm I}$ и $\overset{*}{K}_{(m+1)}=\cdots=\overset{*}{K}_{(n)}=\overset{*}{K}_{\rm II}$ из (3.11) будем иметь

$$\overset{*}{K}{}_{\rm I}^{m}\cdot\overset{*}{K}{}_{\rm II}^{n-m}\leqslant[\overset{*}{K}_{\rm I}]^{m}\cdot[\overset{*}{K}_{\rm II}]^{n-m}.$$

§ 4. Пусть дан сходящийся при $\overset{*}{K}\leqslant r$ функциональный знакопостоянный ряд

$$\varphi([\overset{*}{K}])=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[\overset{*}{K}]^n, \tag{4.1}$$

где $\overset{*}{K}$ — положительный временной оператор из кольца R.

Ряду (4.1) соответствует интегрально-операторный ряд

$$\varphi(\overset{*}{K})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overset{*}{K}{}^n, \tag{4.2}$$

сходящийся абсолютно и равномерно на любой ограниченной области.

В силу теоремы 5 и ее следствия справедливы неравенства

$$\varphi(\overset{*}{K})\leqslant\varphi([\overset{*}{K}]), \tag{4.3}$$

$$r_n(\overset{*}{K})\leqslant r_n([\overset{*}{K}]), \tag{4.4}$$

где $r_n(\overset{*}{K})$, $r_n([\overset{*}{K}])$—остатки рядов (4.2) и (4.1) после n-го члена. Если ряд (4.1) является рядом лейбницевского типа, то в силу теоремы 5 и ее следствия операторный ряд (4.2) также будет рядом лейбницевского типа и имеют место следующие соотношения:

$$S_{2m-1}(\overset{*}{K})<\varphi(\overset{*}{K})<S_{2m}(\overset{*}{K}); \tag{4.5}$$

$$r_{2m}(\overset{*}{K})<0,\quad |r_{2m}(\overset{*}{K})|<a_{2m+1}\overset{*}{K}{}^{2m+1}\leqslant a_{2m+1}[\overset{*}{K}]^{2m+1},$$

$$0<r_{2m-1}(\overset{*}{K})<a_{2m}\overset{*}{K}{}^{2m}\leqslant a_{2m}[\overset{*}{K}]^{2m}, \tag{4.6}$$

где $S_{2m-1}(\overset{*}{K})$, $S_{2m}(\overset{*}{K})$ — частичные суммы четного и нечетного числа членов операторного ряда лейбницевского типа.

Сумма операторного ряда лейбницевского типа из (4.5) приближенно определяется по формуле

$$\varphi(\overset{*}{K})\approx\frac{1}{2}[S_{2m-1}(\overset{*}{K})+S_{2m}(\overset{*}{K})]. \tag{4.7}$$

Решение уравнений (2.1), (2.2) методом теорем 3 и 4 приводит, в частности, к рассмотрению следующей расшифровки операторной функции

$$e^{\overset{*}{K}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overset{*}{K}{}^n}{n!}, \tag{4.8}$$

где в качестве оператора $\overset{*}{K}$ можно брать положительные интегральные операторы типа Абеля [3]

$$\overset{*}{I}_{\alpha}\cdot 1=\int\limits_{0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}d\tau \quad (\alpha>-1), \tag{4.9}$$

оператор Ю. Н. Работнова [3]

$$\overset{*}{\Im}_{\alpha}(\beta)\cdot 1=\int\limits_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^{n}(t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}d\tau \quad (\alpha>-1).$$

В силу (4.3) и (4.4) будем иметь

$$e^{\overset{*}{K}}\leqslant e^{[\overset{*}{K}]}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\overset{*}{K}]^{n}}{n!},$$

$$e^{\overset{*}{K}}\approx\sum_{n=0}^{m}\frac{\overset{*}{K}{}^{n}}{n!}, \qquad r_{m}(\overset{*}{K})<e^{[\overset{*}{K}]}\frac{[\overset{*}{K}]^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{4.10}$$

Например, при $\overset{*}{K}=\overset{*}{\Im}_{\alpha}(\beta)$ для оценки погрешности приближенного вычисления (4.10) требуется лишь табулирование функции

$$\overset{*}{\Im}_{\alpha}(\beta)\cdot 1=\frac{1}{\beta}\Phi(\beta t^{1+\alpha})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{n}t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[1+n(1+\alpha)]}.$$

Рассмотрим положительный интегральный оператор типа Вольтерра с экспоненциальным ядром

$$\overset{*}{K}\cdot 1=\int\limits_{0}^{t}e^{-\lambda(t-\tau)}d\tau; \tag{4.11}$$

$$\overset{*}{K}{}^{2}\cdot 1=-\frac{t}{\lambda}e^{-\lambda t}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{0}^{t}e^{-\lambda(t-\tau)}d\tau<\overset{*}{K}.$$

Пусть справедливо неравенство

$$\overset{*}{K}{}^{n-1}<\overset{*}{K}{}^{n-2},$$

тогда в силу неравенства (3.7) будем иметь

$$\overset{*}{K}{}^{n}=\overset{*}{K}\cdot\overset{*}{K}{}^{n-1}<\overset{*}{K}\cdot\overset{*}{K}{}^{n-2}=\overset{*}{K}{}^{n-1}.$$

Таким образом, для интегральных операторов типа Вольтерра с экспоненциальным ядром имеет место монотонность

$$\overset{*}{K}>\overset{*}{K}{}^{2}>\cdots>\overset{*}{K}{}^{n}>\cdots \tag{4.12}$$

Тогда расшифровка операторной функции

$$\sin\overset{*}{K}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\overset{*}{K}{}^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{4.13}$$

где $\overset{*}{K}$ — интегральный оператор типа (4.11), будет операторным рядом лейбницевского типа, и сумма ряда (4.13) приближенно определяется по формуле (4.7), т. е.

$$\sin \overset{*}{K} \approx \sum_{n=0}^{2m-1} (-1)^n \frac{\overset{*}{K}{}^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{1}{2} \frac{\overset{*}{K}{}^{4m+1}}{(4m+1)!} \quad (m = 1, 2, \cdots), \tag{4.14}$$

причем

$$|r_{2m}(\overset{*}{K})| < \frac{\overset{*}{K}{}^{2(2m+1)+1}}{[2(2m+1)+1]!} \leq \frac{[\overset{*}{K}]^{2(2m+1)+1}}{[2(2m+1)+1]!} \leq \frac{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)^{(2m+1)2+1}}{[2(2m+1)+1]!}. \tag{4.15}$$

В расшифровках (4.8), (4.13) знак равенства следует понимать как символ соответствия (расшифровки) операторного ряда операторной функции. Очевидно, для интегральных операторов, удовлетворяющих условию

$$\overset{*}{K}{}^n = [\overset{*}{K}]^n, \tag{4.16}$$

значения операторных функций и их расшифровок совпадают.

Примером интегральных операторов, удовлетворяющих условию (4.16), является оператор Ржаницына [15]

$$\overset{*}{K} \cdot 1 = \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \quad (0 < \alpha < 1), \tag{4.17}$$

имеющий применение в теории наследственной ползучести.

Решение динамических задач наследственной теории ползучести приводит к расшифровке операторных функций вида

$$e^{\overset{*}{K} \cdot t}, \quad \sin \overset{*}{K} \cdot t, \quad \cos \overset{*}{K} \cdot t, \tag{4.18}$$

где $\overset{*}{K}$ — положительный временной интегральный оператор типа Вольтерра, перестановочный с интегральным оператором

$$\overset{*}{I}_0 \cdot 1 = \int_0^t d\tau.$$

Для первой операторной функции из (4.18) имеем

$$e^{\overset{*}{K} \cdot t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{*}{K}{}^n \cdot t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{*}{K}{}^n \cdot \overset{*}{I}{}_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{*}{I}{}_0^n \cdot \overset{*}{K}{}^n. \tag{4.19}$$

С другой стороны,

$$(1-\overset{*}{I}_0\cdot\overset{*}{K})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{*}{I}{}_0^n\cdot\overset{*}{K}{}^n=1+\overset{*}{R}, \tag{4.20}$$

где $\overset{*}{R}$ — оператор-резольвента исходного оператора $\overset{*}{I}_0\cdot\overset{*}{K}$.

Из курса метематического анализа известно, что при $\overset{*}{I}_0\cdot\overset{*}{K}<1$

$$(1-[\overset{*}{I}_0\cdot\overset{*}{K}])^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}[\overset{*}{I}_0\cdot\overset{*}{K}]^n. \tag{4.21}$$

Следовательно, при $\overset{*}{I}_0\cdot\overset{*}{K}<1$ в силу теоремы 5 и ее следствия

$$1+\overset{*}{R}\leqslant(1-[\overset{*}{I}_0\cdot\overset{*}{K}])^{-1}. \tag{4.22}$$

Если же оператор $\overset{*}{R}$ известен и требуется определить интегральный оператор $\overset{*}{I}_0\cdot\overset{*}{K}$, то, решая операторное уравнение (4.20) методом теоремы 3, будем иметь

$$\overset{*}{I}_0\cdot\overset{*}{K}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\overset{*}{R}{}^n=1-(1+\overset{*}{R})^{-1}, \tag{4.23}$$

ибо исходный оператор $\overset{*}{I}_0\cdot\overset{*}{K}$ и оператор-резольвента $\overset{*}{R}$ всегда перестановочны между собой.

Аналогично (4.19) справедлива следующая расшифровка

$$\sin\overset{*}{K}\cdot t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\overset{*}{K}{}^{2n+1}\cdot t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\overset{*}{I}{}_0^{2n+1}\cdot\overset{*}{K}{}^{2n+1}. \tag{4.24}$$

Если операторный ряд (4.24) лейбницевского типа, то сумма приближенно находится по формуле (4.7). Если же (4.24) становится рядом лейбницевского типа, начиная с некоторого m-го члена, то приближенно приняв сумму операторного ряда (4.24) равной $m-1$-ой частичной сумме, получим погрешность, меньшую по абсолютной величине m-го члена. Например, пусть $\overset{*}{K}$ — интегральный оператор типа (4.11).

Так как для интегральных операторов $\overset{*}{I}_0$ типа Вольтерра найдется номер N такой, что при $n>N$ будем иметь

$$\overset{*}{I}{}_0^n>\overset{*}{I}{}_0^{n+1}>\cdots>\overset{*}{I}{}_0^{n+l}>\cdots,$$

то, по крайней мере, начиная с номера N, в силу неравенства (3.7) операторный ряд (4.24) будет рядом лейбницевского типа.

Днепропетровский горный институт
Павлодарский пединститут
Поступила 15 IV 1965

Ա. Մ. ԴԱՏԿԱԵՎ, Մ. Ի. ՌՈԶՈՎՍԿԻ

ՍՈՂՔԻ ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ԵՎ ՕՊԵՐԱՏՈՐԱ-ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ դիտարկվում է Վոլտերի տիպի գծային սահմանափակ ինտեգրալ օպերատորների լրիվ նորմալավորված օղակ և տրվում է սողքի ժառանգական տեսության ինտեգրալ և ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների մի դասի լուծումների կառուցման մեթոդ։ Որոշվում են օպերատորային ֆունկցիաների և նրանց պարզաբանումների միջև առնչությունները։ Այդ թույլ է տալիս սողքի ժառանգական տեսության ստատիկական և դինամիկական խնդիրները ինտեգրալա-օպերատորական մեթոդով լուծելիս ստանալ օպերատորային շարքերի մոտավոր գումարը։

A. M. DATKAEW, M. J. ROSOWSKY

ON THE OPERATOR AND OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE CREEP HEREDITARY THEORY

Summary

The whole normalized ring of the Volterra type lineary limited integral operators is considered and the method of creating the solution of the creep hereditary theory of one class of integral and of integral-differential equations is given.

The relations obtained between operator functions and their deciphering allow us to obtain the approximate sum of the operator series met with in solving the integral-operator method of the static and dynamic creep hereditary problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В.* и *Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
2. *Быков Я. В.* О некоторых методах построения решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Изд. АН Кирг.ССР, Фрунзе, 1961.
3. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 12, 1948.
4. *Соболев С. Л.* Уравнение математической физики. Гостехтеориздат, М., 1954, стр. 144.
5. *Розовский М. И.* Полусимволический способ решения некоторых задач теории наследственной упругости. ДАН СССР, **111**, № 5, 1956.
6. *Розовский М. И.* Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения с частными производными в неограниченном пространстве. Успехи мат. наук, **12**, в. 3(75), 1957.

7. *Розовский М. И.* Об одном способе решении нелинейных уравнений теории ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 1, 1959.
8. *Розовский М. И.* Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки. Известия АН СССР, ОТН, мех. и мат., № 5, 1959.
9. *Розовский М. И.* О нелинейных уравнениях ползучести и релаксации материалов при сложном напряженном состоянии. Журнал тех. физики, **25**, в 13, 1955.
10. *Розовский М. И.* Некоторые задачи теории неустановившейся ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **24**, № 3, 1961.
11. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. ИЛ, М., 1960.
12. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., 1950, стр. 111–119.
13. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. Физматгиз, М., 1958, стр. 109.
14. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехтеориздат, М.—Л., 1950, стр. 215.
15. *Ржаницын А. Р.* Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехтеориздат, М.—Л., 1949, стр. 228.