

Э. А. ЗОРЯН

## БРИЗОВАЯ ЦИРКУЛЯЦИЯ С УЧЕТОМ АДВЕКЦИИ ТЕПЛА

В литературе вопросу бризовой циркуляции посвящено много работ [1—11] как по линейной теории, так и по нелинейной. Несмотря на то, что нелинейные члены в исследовании вопроса бризовой циркуляции являются существенными, по линейной постановке задачи удается получить качественно верные результаты, совпадающие с фактическими данными [7, 8, 11].

В нелинейной постановке задачи возникают большие трудности, поэтому исследователи прибегают к приближенным решениям частных задач [1, 2, 5, 6].

При решении задачи нестационарной местной циркуляции в нелинейной постановке при произвольном распределении температуры подстилающей поверхности наиболее точным является метод А. А. Дороницына [3, 4, 9, 10]. Но и этот метод до конца не решает задачу, так как полученные результаты пригодны лишь для определения начальной стадии развития циркуляции из состояния покоя.

В данной работе при решении задачи бризовой циркуляции в уравнении притока тепла учитывается адвекция тепла, так как из нелинейных членов именно этот член оказывает наибольшее влияние ввиду того, что особенностью бризов является взаимодействие между движением воздуха и полем температуры, учитываемое указанным выше нелинейным членом.

### § 1. Постановка и решение задачи

Исходными являются уравнения гидротермодинамики, упрощенные при помощи теории свободной конвекции [1]. Для простоты рассмотрим плоскую нестационарную задачу при постоянном коэффициенте турбулентного перемешивания с учетом адвекции тепла. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \lambda \frac{\partial}{\partial z} \int_{\infty}^z \theta(x, \zeta, t) d\zeta, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 & \quad u = w = 0, \quad \theta = \theta_0(x, t), \\ \text{при } z = \infty & \quad u = \theta = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

здесь

$$\theta_0(x, t) = T(x) \sin \omega t. \quad (1.5)$$

Начало координат расположено на уресе воды, причем  $z$  направлено вертикально вверх,  $x$  — по нормали к берегу от воды к суше. Остальные обозначения следующие:  $t$  — время,  $k$  — коэффициент турбулентного перемешивания по вертикали,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси,  $\lambda = g/273$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $u, w$  — компоненты скорости ветра,  $\theta$  — отклонение температуры от значения в положении равновесия.

Решение задачи ищется периодическое, с суточным периодом. Система (1.1)–(1.3) с граничными условиями (1.4) решается приближенно.

Для решения системы (1.1) и (1.2) сперва находим решение линейной задачи, без учета члена  $u \frac{\partial \theta}{\partial x}$  оно имеет вид [7]:

$$u_1 = - \frac{\lambda s z}{8k\sigma^2} \frac{dT}{dx} e^{-sz} [e^{i(\omega t - sz)} + e^{-i(\omega t - sz)}], \quad (1.6)$$

$$\theta_1 = i \frac{T(x)}{2} e^{-sz} [e^{-i(\omega t - sz)} - e^{i(\omega t - sz)}]. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.2) решается как линейное уравнение с известной правой частью  $u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{k} u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \quad (1.8)$$

$$\theta|_{z=0} = \theta_0 \quad \text{и} \quad \theta|_{z=\infty} = 0. \quad (1.9)$$

Решение уравнения (1.8) с граничными условиями (1.3) ищется в виде

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \quad (1.10)$$

где  $\theta_1$  — решение однородного уравнения с граничными условиями (1.9), т. е. решение линейного уравнения в виде (1.7);  $\theta_2$  — решение неоднородного уравнения (1.8)

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = i2s^3 M_2 [e^{-2(1+i)sz + 2i\omega t} - e^{-2(1-i)sz - 2i\omega t}] \quad (1.11)$$

с нулевыми граничными условиями

$$\theta_2|_{z=0}, \quad \theta_2|_{z=\infty} = 0, \quad (1.12)$$

которое имеет вид

$$\theta_2(x, z, t) = 2M_2 [(1-i+sz)e^{-(1+i)sz} - (1-i)e^{-\sqrt{2}(1+i)sz}] e^{2i\omega t} +$$

$$+ [(1+i+\sigma z) e^{-2(1-i)\sigma z} - (1+i) e^{-\sqrt{2}(1-i)\sigma z}] e^{-2i\omega t}. \quad (1.13)$$

Здесь

$$M = \frac{\lambda \varepsilon^2}{32 k^3 \sigma^3} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2, \quad \bar{x} = \sigma x, \quad \sigma^2 = \frac{\omega}{2k}.$$

Для нахождения горизонтальной составляющей скорости  $u(x, z, t)$  решаем уравнение (1.1) с известной правой частью

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^2 [M_n(\bar{x}, z) e^{-i\omega t} + M_n^*(\bar{x}, z) e^{i\omega t}], \quad (1.14)$$

при граничных условиях

$$u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (1.15)$$

Здесь

$$M_1 = (1-i) \frac{i\varepsilon}{4k\sigma} \frac{dT}{dx} e^{-(1-i)\sigma z}, \quad M_1^* = (1+i) \frac{i\varepsilon}{4k\sigma} \frac{dT}{dx} e^{-(1+i)\sigma z},$$

$$M_2 = \frac{\lambda^2 \varepsilon^3}{32 k^3 \sigma^3} \frac{dT}{dx} \frac{d^2 T}{dx^2} \left[ \frac{i}{\sqrt{2}\sigma} e^{-(1-i)\sqrt{2}\sigma z} - \left( \frac{5i}{8\sigma} + \frac{1+i}{4} z \right) e^{-2(1-i)\sigma z} \right],$$

$$M_2^* = \frac{\lambda^2 \varepsilon^3}{32 k^3 \sigma^3} \frac{dT}{dx} \frac{d^2 T}{dx^2} \left[ -\frac{i}{\sqrt{2}\sigma} e^{-(1+i)\sqrt{2}\sigma z} + \left( \frac{5i}{8\sigma} - \frac{1-i}{4} z \right) e^{-2(1+i)\sigma z} \right].$$

Решение уравнения (1.14) с граничными условиями (1.15) имеет вид

$$u(x, z, t) = -\frac{i\varepsilon z}{4k\sigma^2} \frac{dT}{dx} e^{-iz} \cos(\omega t - \sigma z) + A(x) [\varphi_1(z) \cos 2\omega t + \varphi_2(z) \sin 2\omega t], \quad (1.16)$$

где

$$\varphi_1(z) = e^{-\sqrt{2}z_1} [2z_1 \sin \sqrt{2}z_1 + (2z_1 - 4,5) \cos \sqrt{2}z_1] + e^{-2z_1} [(z_1 + 4,5) \cos 2z_1 + z_1 \sin 2z_1],$$

$$\varphi_2(z) = e^{-\sqrt{2}z_1} [(2z_1 - 4,5) \sin \sqrt{2}z_1 - 2z_1 \cos \sqrt{2}z_1] + e^{-2z_1} [(z_1 + 4,5) \sin 2z_1 - z_1 \cos 2z_1],$$

$$A(x) = \frac{\lambda^2 \varepsilon^3}{256 k^3 \sigma^3} \frac{dT}{dx} \frac{d^2 T}{dx^2}, \quad z_1 = \sigma z.$$

Выражение для функции  $\theta(x, z, t)$  будет иметь вид

$$\theta(x, z, t) = T(x) e^{-z_1} \sin(\omega t - z_1) + M(x) [\psi_1(z) \cos 2\omega t + \psi_2(z) \sin 2\omega t], \quad (1.17)$$

где

$$\psi_1(z) = e^{-2z_1} [(1+z_1) \cos 2z_1 - \sin 2z_1] - e^{-\sqrt{2}z_1} (\cos \sqrt{2}z_1 - \sin \sqrt{2}z_1),$$

$$\psi_2(z) = e^{-2z_1} [(1+z_1) \sin 2z_1 + \cos 2z_1] - e^{-\sqrt{2}z_1} (\cos \sqrt{2}z_1 + \sin \sqrt{2}z_1).$$

В выражениях (1.16) и (1.17) первые члены представляют собой решение линейной задачи, а вторые слагаемые учитывают влияние нелинейного члена адвекции тепла.

Вертикальную составляющую скорости определяем из уравнения неразрывности

$$w(x, z, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^z u(x, \zeta, t) d\zeta. \quad (1.18)$$

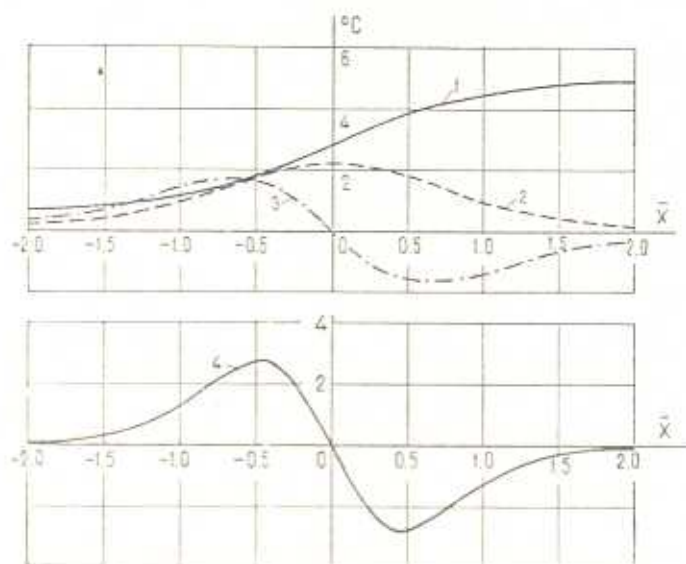
## § 2. Примеры расчетов при заданном распределении температуры подстилающей поверхности

Как показано в [7],  $T(x)$  можно задать в виде гиперболического тангенса. Тогда, используя наиболее характерные значения температуры поверхности воды озера Севан и суши в его бассейне, было получено

$$T(x) = 2,8 + 2,2 \operatorname{th} \pi x. \quad (2.1)$$

На больших расстояниях от берега получается для суши  $\theta_{\text{max}} = \pm 5^\circ\text{C}$ , в то время, как на центральных частях озера  $\pm 0,6^\circ\text{C}$ , т. е. суточная амплитуда температуры суши принята равной  $10^\circ\text{C}$ , а поверхности воды  $-1,2^\circ\text{C}$ .

При числовых расчетах принято  $i = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ м сек}^{-2} \text{ град}^{-1}$ ;  $k = 3,64 \text{ м}^2 \text{ сек}^{-1}$ ;  $\varepsilon = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ ; тогда  $\tau = 0,316 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ .



Фиг. 1. 1 — температура подстилающей поверхности  $T$ ;

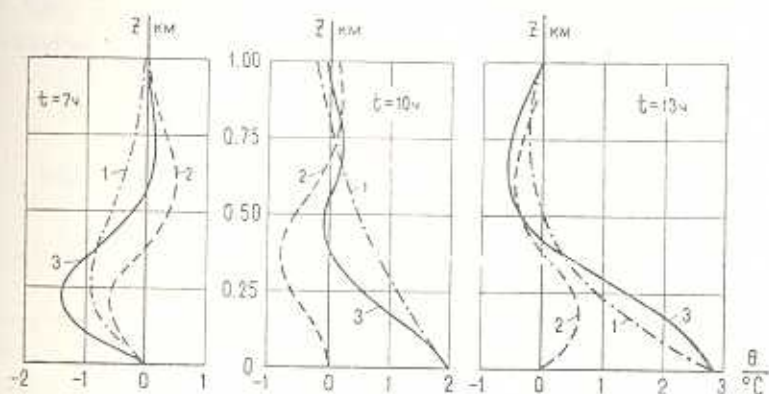
$$2 - \frac{\partial T}{\partial x}; \quad 3 - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad 4 - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

На фиг. 1 приведены графики распределения температуры под-



стилающей поверхности и ее производных первого и второго порядка, а также их произведения.

На фиг. 2 представлены профили температуры в различные моменты времени в точке  $\bar{x} = 0$ , где влияние нелинейного члена — адвекции тепла на распределение температуры имеет наибольшее значение.



Фиг. 2. Температурные кривые в различные часы суток в точке  $\bar{x} = 0$ :

1 — линейное решение  $\theta$ ; 2 — влияние нелинейного члена  $\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x}$ ; 3 — полное решение  $\theta$ .

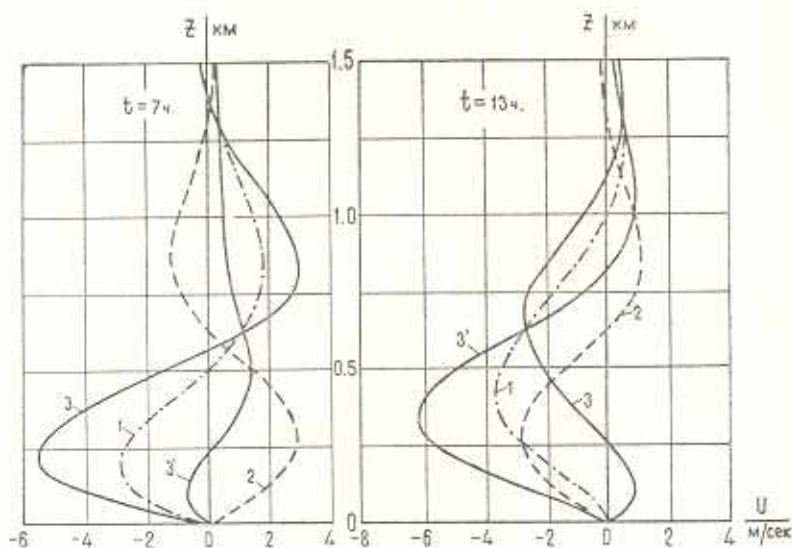
Они приведены пунктирными линиями (2).

Линейное решение задачи представлено графиками (1), а сплошные кривые представляют полное решение, соответствующее выражению (1.17).

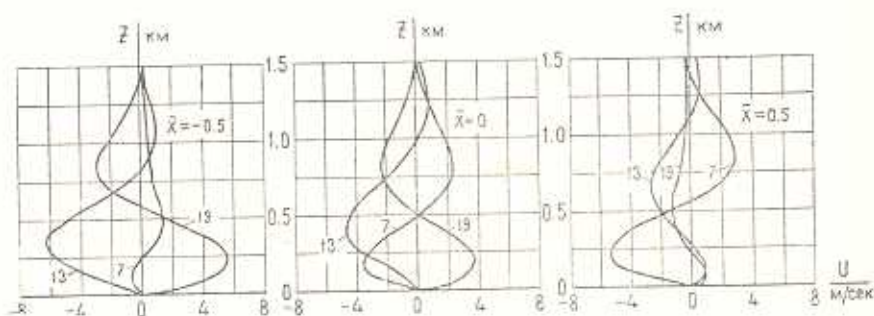
На фиг. 3—4 представлены профили горизонтальной составляющей скорости в различные моменты времени в точках  $\bar{x} = -0,5; 0,5$  и 0 (на фиг. 4). Решение линейной задачи представлено графиками (1), а пунктирными линиями — влияние нелинейного члена адвекции тепла (2), сплошными линиями показано полное решение задачи, соответствующее выражению (1.16). На фиг. 4 представлены только полные решения в различные моменты времени в точках  $\bar{x} = 0,5; 0; -0,5$ .

При рассмотрении этих графиков становится очевидным влияние адвекции тепла на бризовую циркуляцию. Во-первых, она не одинаково влияет на рассматриваемое явление в различных точках по горизонтали. Так, например, если рассмотрим продольную составляющую скорости, то при линейной постановке задачи имеем только первое слагаемое уравнения (1.16), при этом максимальное значение  $u$ , при фиксированном  $t$ , достигается в точке  $\bar{x} = 0$  и имеет симметричные значения относительно уреза воды, так как следует ходу первой производной температуры подстилающей поверхности. В то же время при учете члена адвекции тепла эта симметричность нарушается. Второй член уравнения (1.16) прямо пропорционален произведению первых двух производных наземной температуры.

Как видно из фиг. 1, график этой функции асимметричен относительно вертикальной оси, следовательно, при фиксированном  $t$  влияние нелинейного члена в разных точках по  $\bar{x}$  различно. Так, например, в точке  $\bar{x} = 0$  его влияние на распределение горизонтальной скорости равно нулю, а при  $\bar{x} = \pm 0,5$  оно достигает своего максимального значения, причем если в точке  $\bar{x} = 0,5$  от линейного слагаемого отнимается нелинейное слагаемое, то в точке  $\bar{x} = -0,5$  оно прибавляется, и наоборот.



Фиг. 3. Профили скорости  $u$ : 1 — линейное решение; 2 — влияние нелинейного члена  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ; 3 — полное решение для скорости  $u$  в точке  $\bar{x} = 0,5$ ; 3' — полное решение для скорости  $u$  в точке  $\bar{x} = -0,5$ .



Фиг. 4. Профили скорости  $u$  в различные часы суток в точках  $\bar{x} = -0,5$ ;  $\bar{x} = 0$  и  $\bar{x} = 0,5$ .

Таким образом, при учете члена  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  распределение горизонтальной составляющей скорости в различных точках не только не симметричное, но и различное. Это ясно видно на фиг. 3 и 4.

Влияние нелинейного члена сильно зависит от масштаба явления—  
 $L = \varepsilon^{-1}$ .

При мелкомасштабных явлениях влияние нелинейных членов имеет существенное значение. При явлениях большого масштаба их влияние ослабевает.

НИИ Водных проблем и гидротехники  
 МВХ Армянской ССР

Поступила 22 V 1965

Չ. Հ. ԶՈՐԻԱՆ

ՋԵՐՄՈՒԹՅԱՆ ԱԳՎԵՑԻԱՅԻ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲՐԻՉԱՅԻՆ  
 ՅԻՐԿՈՒԹՅԱՅԻՆՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հողվածում բերվում է բրիզային ցիրկուլացիայի հարթ, ոչ ստացիո-  
 նար խնդրի պարբերական լուծումը, ելնելով հիզրո-ջերմադինամիկայի հա-  
 վասարումներից, ջերմութեան ազդեցիկայի առկայությամբ:

Խնդիրը լուծվում է մոտավոր: Որպես առաջին մոտավորություն վերց-  
 ված է բրիզային ցիրկուլացիայի գծային լուծումը: Երկրորդ մոտավորու-  
 թյամբ հաշվի է առնվում ջերմութեան ազդեցիկայի ոչ գծային անդամը ջեր-  
 մային հոսքի հավասարման մեջ, որպես հայտնի աջ մաս, ստացված առա-  
 ջին մոտավորությունից:

Խնդրի լուծումը ներկայացված է (1.16) և (1.17) արտահայտություն-  
 ներով, որտեղ առաջին գումարելիները իրենցից ներկայացնում են գծային  
 լուծումները, իսկ երկրորդ գումարելիները՝ ջերմութեան ազդեցիկայի ազդե-  
 ցությունը: 2, 3 և 4 նկարներից պարզ երևում է ջերմութեան ազդեցիկայի  
 ազդեցությունը բրիզային ցիրկուլացիայի վրա: Նա ուժեղ կերպով կախված  
 է երևույթի հորիզոնական մասշտաբից, փոքր մասշտաբի երևույթների հա-  
 մար այդ ազդեցությունը մեծ է, իսկ մեծ մասշտաբի երևույթների համար  
 այն փոքր է:

Z. H. ZORIAN

A BREEZE CIRCULATION TAKING INTO ACCOUNT  
 HEAT ADVECTION

Summary

In this paper a new precision has been described in the linear non-stationary theory of breeze circulation.

The precision concerning the non linear member in the heat flux equation is made on the basis of a second degree approximation, the linear theory being considered as a first degree approximation.

New qualitative results have been obtained as compared with those of the linear theory.



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гутман Л. Н. О вертикальной структуре бризов. Труды ЦИП, вып. 8 (35), 1948.
2. Гутман Л. Н. О распределении бризов по нормали к берегу. Метеорология и Гидрология, № 2, 1949.
3. Добрышман Е. М., Шакина Н. А. К величинной теории локальных ветров в турбулентной атмосфере. Известия АН СССР, сер. геофиз., 2, 1962.
4. Зейтуляк Х. Н. К величинной теории нестационарного ветра склонов. ДАН СССР, 133, № 6, 1960.
5. Кибель И. А. Метод решения задачи о локальном ветре. Доклады ЦИП, 1, вып. 1—2, 1947.
6. Марков Д. В. и Альбов Н. В. Модель стационарной бризовой циркуляции. Труды ГГО, вып. 31—Теоретическая метеорология (8), 1940.
7. Мхитарян А. М. О бризах в бассейне оз. Севан, и некоторые результаты их расчета по фактическому распределению температуры подстилающей поверхности. Сообщение 1, Известия АН АрмССР, серия техн. наук, № 5, 1962; сообщение 2: там же, № 6, 1962.
8. Мхитарян А. М., Дагестанли М. Г. О влинии формы береговой линии на бризовую циркуляцию. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, 5, 1964.
9. Мхитарян А. М. К теории конвекции большого масштаба. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естество- и техн. наук, 8, № 1, 1955.
10. Ситников И. Г. Некоторые результаты гидродинамического исследования бризов. Труды ЦИП, вып. 93, 1960.
11. Ямасита. О береговых и морских бризах. Journ. of Japan met. society, Tokio, 31, № 5, 1953.