

А. С. ВОЛЬМИР, М. С. ГЕРШТЕЙН

О ПОВЕДЕНИИ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ КАК УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Исследуется поведение кровеносных сосудов, рассматриваемых как нелинейно-упругие оболочки, при быстро протекающих гемодинамических процессах. Используются динамические уравнения для оболочки, получающей большие радиальные перемещения. Движение крови рассматривается как ламинарное течение ньютоновской жидкости. С помощью метода конечных разностей с применением цифровой электронной машины получены числовые результаты для ряда примеров.

В качестве одного из применений теории упругих оболочек рассмотрим поведение артерий при быстро протекающих гемодинамических процессах. Будем рассматривать кровеносный сосуд как нелинейно-упругую цилиндрическую оболочку, получающую относительно большие радиальные перемещения. Дополнив инерционными членами уравнения равновесия элемента оболочки [1], получим следующие динамические уравнения для оболочки радиуса R и толщины h , в предположении, что деформация является осесимметричной

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R} N_y + p + \frac{\rho_1 h^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_x - \rho_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Координата x откладывается вдоль образующей, y — по дуге, z — в радиальном направлении; u и w — перемещения точек срединной поверхности в направлениях x и z . Через ρ_1 обозначена плотность материала стенки сосуда, M — изгибающий момент, N_x и N_y — нормальные усилия, действующие в сечениях оболочки.

Деформации выражаются через перемещения с помощью следующих соотношений:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{w}{R} - \frac{w}{R^2} z. \quad (4)$$

Что касается упругих свойств сосуда, то будем исходить из данных, приведенных, например, в книге [2]. На фиг. 1 показаны диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ при одноосном растяжении стенок артерий. Кривая 1 от-

носится к легко растяжимому сосуду, кривая II — к ригидному сосуду лица пожилого возраста.

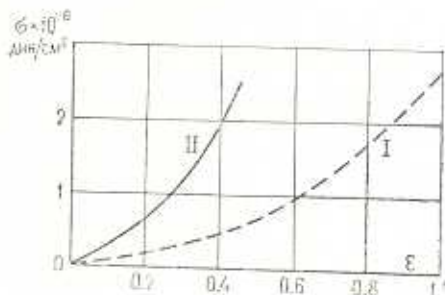
Давление p крови определяется из решения гидродинамических уравнений для крови, текущей в сосуде: уравнения движения

$$-\rho_0 X + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_0 V)}{\partial t} + 2a_0 V = 0 \quad (5)$$

и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{2}{R+w} \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Здесь V — осредненная по сечению скорость потока, ρ_0 — плотность жидкости, X — ускорение массовых сил, K — объемный модуль упругости жидкости при сжатии. Коэффициент $2a_0$, учитывающий потери на трение, и продольное усилие p_x , действующее на стенки сосуда, будем определять в предположении, что движение крови по сосудам является ламинарным течением ньютоновской жидкости.



Фиг. 1.

Таким образом, задача сводится к исследованию неустановившегося течения вязкой жидкости в упругом трубопроводе. Некоторые новые работы в этой области указаны в статье [3].

Изменение гемодинамических параметров при сокращении сосудистой стенки под действием сосудодвигательных рефлексов исследовалось в работе [4].

Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, & l &= \frac{L}{R}, & w^* &= \frac{w}{h}, & u^* &= \frac{u}{h}, \\ \delta &= \frac{h}{R}, & \alpha &= \frac{\rho_1}{\rho_0}, & \tau &= \frac{c_0 t}{L}, \\ V^* &= \frac{V}{c_0} \left(\frac{R}{h} \right)^2, & p^* &= \frac{p}{K} \left(\frac{R}{h} \right)^2, \\ v^* &= \frac{\nu L}{c_0 R^2}, & m &= X \frac{L}{K} \left(\frac{R}{h} \right)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь L — длина участка сосуда, c_0 — скорость звука в крови, ν — кинематический коэффициент вязкости крови.

С помощью параметров (7) система уравнений (1), (2), (5), (6) была приведена к безразмерному виду, а затем проинтегрирована на цифровой электронной машине с помощью метода конечных разностей.

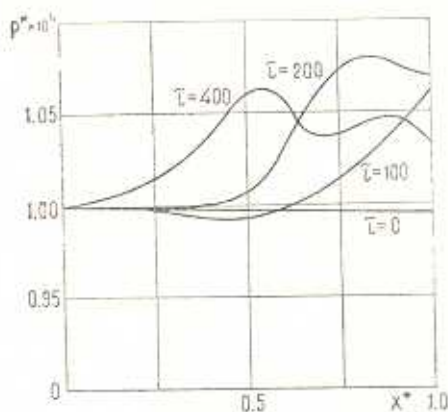
В качестве первого примера было рассмотрено поведение участка сосуда длиной L при внезапном закупоривании его в сечении $x^* = 1$. Были приняты следующие значения безразмерных параметров: $l = 10$, $\delta = 0,2$, $\alpha = 1$, $\nu^* = 0,2 \cdot 10^{-4}$. Начальные условия соответствовали установившемуся течению крови. Исходная безразмерная скорость была принята равной $V_0^* = 2 \cdot 10^{-3}$, давление в сечении $x^* = 0$: $p_0^* = 1 \cdot 10^{-4}$. Граничные условия для жидкости были приняты в следующем виде:

$$\begin{aligned} p^* &= p_0^*, \quad \partial V^* / \partial x^* = 0 \quad \text{при } x^* = 0; \\ V^* &= 0, \quad \partial^2 V^* / \partial x^{*2} = 0 \quad \text{при } x^* = 1. \end{aligned}$$

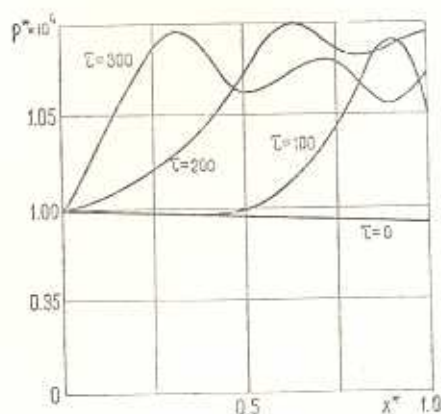
Граничные условия для оболочки при $x^* = 0$ и $x^* = 1$ заключались в следующем:

$$\partial w^* / \partial x^* = \partial^2 w^* / \partial x^{*2} = 0, \quad u^* = 0. \quad (8)$$

Результаты интегрирования представлены на Фиг. 3 и 4 в виде кривых распределения давления по длине сосуда в последовательные моменты времени τ .



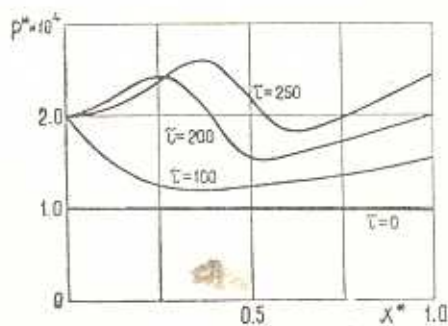
Фиг. 2.



Фиг. 3.

Кривые давления на фиг. 2 относятся к легкорастяжимому сосуду, диаграмма $\sigma(\varepsilon)$ для которого показана на фиг. 1 цифрой 1. Фиг. 3

относится к ригидному сосуду (кривая II на фиг. 1).



Фиг. 4.

Сравнение этих графиков позволяет оценить влияние жесткости стенок сосуда на местное повышение давления при закупоривании артерии. Графики подтверждают, кроме того, известные данные о возрастании скорости распространения возмущений в артериях (в частности, пульсовой волны) по мере увеличения жесткости стенок сосудов.

На фиг. 4 показано последовательное изменение давления в растяжимом сосуде при действии перегрузки („повышенной гравитации“), направленной в сторону, противоположную течению крови в рассматриваемой артерии. Величина перегрузки зависела от времени следующим образом:

$$m = - 0,5 \cdot 10^{-5} \gamma(\tau),$$

где $\gamma(\tau)$ — единичная функция Хевисайда.

Начальные условия, как и в предыдущем примере, соответствовали установившемуся течению, а граничные условия для оболочки отвечали зависимостям (8). Было принято, кроме того, что в сечении $x^* = 0$ давление изменяется по следующему закону:

$$p^* = \begin{cases} p_0^* (1 + 0,01 \tau) & \text{при } 0 \leq \tau \leq 100, \\ 2p_0^* & \text{при } \tau > 100, \end{cases}$$

т. е. давление при входе в рассматриваемый участок сосуда повышается в два раза за время $\tau = 100$, а затем остается неизменным. Такое повышение давления может явиться следствием, например, рефлекторной реакции. Расчеты на цифровой электронной машине показывают, что при указанном сочетании воздействий максимальное давление в артерии в момент времени $\tau = 250$ после начала действия перегрузки составляет $1,31 p^*|_{x=0}$.

Использованный метод может быть применен к изучению гемодинамических явлений как в обычных условиях, так и при действии на организм значительных ускорений.

Военно-воздушная инженерная академия
им. проф. Н. Е. Жуковского

Поступила 19 VII 1965

Ա. Ա. ՎԱՍԻՐԻ, Մ. Ս. ԳԵՐՇԵՅԻՆ

ԱՐԶԻՆԱՍՏՐ ԱՆՈՔՆԵՐԻ, ՈՐՊԵՍ ԱՌԱՋԳՈՒԱՆ ԹԱԳԱՆՔՆԵՐԻ,
ՎԱՐՔԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատության մեջ նկատատվում է որպես ոչ-դժային-առտնդական թաղանթների դիտվող արչունատար անսթնների վարքը արագ ընթացող հեմոդինամիկական պրոցեսների ժամանակ: Օգտագործվում են դինամիկական հավասարումներ՝ մեծ շտապիզային տեղափոխումներ ստացող թաղանթի համար: Արչան շարժումը դիտվում է որպես նյութատնյան հեղուկի լամինար հոսանք: Վերջավոր տարբերությունների մեթոդի օգնությամբ, թվային էլեկտրոնային մեքենայի կիրառումով ստացված են թվային արդյունքներ՝ մի շարք օրինակների համար: Բերված են անոթի երկայնքով ճնշման բաշխման գրաֆիկներ՝ ժամանակի մի շարք հաջորդական մոմենտների համար:

Յույց է տրված, որ դարկերակի հանկարծական խցանման զեպրում սիդիդալին անոթում ճնշման տեղալին բարձրացումը ավելի խոշոր մեծութուն է կազմում, քան թեթևակի ձգված դարկերակում: Արյան հոսանքին հակառակ ուղղված գերբնեմվածքի ազդեցությունը հանգեցնում է, ինչպես հետևում է բերված գրաֆիկներին, անոթում հիդրոգինամիական ճնշման զգալի բարձրացմանը:

A. S. VOL'MIR, M. S. HERSCHTEIN

ON THE BEHAVIOR OF BLOOD VESSELS AS ELASTIC SHELLS

Summary

Arterial blood flow is analyzed on the basis of a model consisting of a viscous liquid contained in a cylindrical elastic shell. Approximate forms of the Navier-Stokes and continuity equations are derived for this model and solved by the method of finite-differences in conjunction with the equations of a non-linear elastic shell.

Numerical results are obtained with digital computer aid for transient reaction of arteria walls on sudden thrombosis.

The dynamic interaction of blood flow with arteries in the presence of high gravitation is also examined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластики и оболочки. Пер. с англ. М., 1963.
2. Савицкий Н. Н. Биофизические основы кровообращения и клинические методы изучения гемодинамики. Л., 1963.
3. Кильчевский Н. А., Селезов И. Т., Накулинская С. Н., Палько А. С. Гидравлический удар в упругом трубопроводе. ДАН УССР, 24, 165, 1962.
4. Хаютин В. М. Сосудодвигательные рефлексy. М., 1964.