ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, 1966, № 1 Механика

А. А. БАБЛОЯН

О ДВУХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. В работе рассматривается интегральное уравнение Фредгольма второго рода, ядро которого зависит от суммы $x+t$, т. е.

$$f(x)+\int_0^\infty f(t)\,k(x+t)\,dt=g(x)\quad(0<x<\infty). \tag{1.1}$$

К такому уравнению сводятся многие задачи математической физики со смешанными граничными условиями. Уравнение (1.1) будем решать методом, предложенным И. М. Рапопортом [1], то-есть сведем его к решению краевых задач Гильберта-Привалова, когда контуром разделения областей является ось абсцисс. Решение уравнения (1.1) мы будем искать в классе L^2, когда $k(x)$ и $g(x)\in L^2$ и, кроме того, функция $k(x)$ удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{aligned} k(x)&=0\,(x^{-1-\varepsilon})\quad \text{при}\quad x\to\infty\\ \operatorname*{var}_{0<t<x} k(t)&=0\,(x^{1-\varepsilon})\quad \text{при}\quad x\to\infty,\ \varepsilon>0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

а преобразование Фурье функции $k(x)$ удовлетворяет условиям Липшица и не принимает значения $\pm 1/\sqrt{2\pi}$ вдоль положительной полуоси x. Однако, как известно, метод, предложенный И. М. Рапопортом, применим и в том случае, если преобразование Фурье функции $k(x)$ в конечном числе точек полуоси x принимает значение $\pm 1/\sqrt{2\pi}$, а также если эта функция имеет конечное число точек разрыва.

Продолжая функции $f(x)$, $g(x)$ нулем на отрицательную полуось, а функцию $k(x)$ четным образом, перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(t)+\sqrt{2\pi}\,F(-t)\,K(t)-G(t)\right]e^{-ixt}\,dt=0\quad(0<x<\infty), \tag{1.3}$$

где

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{ixt}\,dt,\qquad G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{ixt}\,dt,$$

$$K(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,e^{ixt}\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty k(t)\cos xt\,dt. \tag{1.4}$$

Тогда по формуле обращения Фурье из условия $f(x)=0$ при $-\infty<x<0$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,e^{-ixt}dt=0 \quad (-\infty<x<0). \tag{1.5}$$

Пользуясь теперь леммой, доказанной И. М. Рапопортом, можно утверждать, что если существует функция $F(x)\in L^2$, удовлетворяющая соотношениям (1.3) и (1.5), то существуют функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, голоморфные первая в верхней, вторая в нижней полуплоскостях, исчезающие на бесконечности, предельные значения которых на действительной оси соответственно равны

$$\Phi^+(x+i0)=F(x),\quad \Phi^-(x-i0)=F(x)+\sqrt{2\pi}F(-x)K(x)-G(x) \tag{1.6}$$

и, следовательно, удовлетворяющие соотношению

$$\Phi^-(x-i0)=\Phi^+(x+i0)+\sqrt{2\pi}\,K(x)\,\Phi^+(-x+i0)-G(x). \tag{1.7}$$

Заменяя в уравнении (1.7) x на $-x$ и учитывая, что $K(x)$ — действительная и четная функция, получим

$$\Phi^-(-x-i0)=\Phi^+(-x+i0)+\sqrt{2\pi}\,K(x)\,\Phi^+(x+i0)-G(-x). \tag{1.8}$$

После сложения и вычитания уравнений (1.7) и (1.8) мы приходим к следующим краевым задачам Гильберта-Привалова

$$\Phi_p^-(x-i0)=W_p(x)\,\Phi_p^+(x+i0)-G_p(x), \tag{1.9}$$
$$-\infty<x<\infty,\quad p=1,\ 2.$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi_p^{\pm}(x\pm i0)=\Phi^{\pm}(x\pm i0)-(-1)^p\Phi^{\pm}(-x\pm i0),$$
$$G_p(x)=G(x)-(-1)^p\,G(-x) \tag{1.10}$$
$$W_p(x)=1-(-1)^p\sqrt{2\pi}\,K(x)\quad (p=1,\ 2).$$

Из формул (1.3)—(1.5) следует, что неизвестная функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^+(t+i0)\,e^{-ixt}dt=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi_1^+(t+i0)+\Phi_2^+(t+i0)]\,e^{-ixt}\,dt, \tag{1.11}$$

равна нулю при $-\infty<x<0$ и удовлетворяет интегральному уравнению (1.1) при $0<x<\infty$.

Так как функции $W_p(x)$ принимают только действительные значения, то индекс этих функций

$$\varkappa_p = \frac{1}{2\pi} \arg W_p(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (p = 1, 2). \tag{1.12}$$

При этом краевая задача (1.9), как известно, имеет единственное решение, а предельные значения $\Phi_p^+(z)$ на вещественной оси задаются по формуле:

$$\Phi_p^+(x + i0) = \frac{1}{2W_p(x)} \left\{ G_p(x) - \frac{H_p(x)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_p(t)\,dt}{H_p(t)(t-x)} \right\} \quad (p = 1, 2), \tag{1.13}$$

где

$$H_p(x) = \sqrt{W_p(x)} \exp\left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln W_p(t)\,dt}{t - x} \right]. \tag{1.14}$$

Здесь мы пользовались решением краевой задачи (1.9), данным И. М. Рапопортом.

В силу условий (1.2) $|H(x)| < \infty$ и $|H^{-1}(x)| < \infty$, а в этом случае из (1.13) непосредственно следует, что $\Phi_p^+(x + i0) \in L^2$, если $G_p(x) \in L^2$. Таким образом, формулы (1.11)—(1.14) определяют решение $f(x) \in L^2$ интегрального уравнения (1.1), если $G_p(x) \in L^2$.

Пример. Если $k(x) = Ae^{-\alpha|x|}$, где для простоты принимаем $\alpha > 2A \geqslant 0$, то

$$W_p(x) = \frac{x^2 + \alpha_p^2}{x^2 + \alpha^2}, \qquad H_p(x) = \frac{x - i\alpha_p}{x - i\alpha},$$

$$\Phi_p^+(x + i0) = (x^2 - \alpha_p^2)^{-1} \{(x^2 + \alpha^2) G_p(x) - i(\alpha_p - \alpha)(x + i\alpha) G_p(i\alpha_p)\},$$

$$f(x) = g(x) - \frac{(\alpha_1 - \alpha)^2 + 2A\alpha}{4\alpha_1} \int_0^{\infty} g(y) [e^{-\alpha_1|x-y|} + e^{-\alpha_1(x+y)}]\,dy -$$

$$- \frac{(\alpha_2 - \alpha)^2 - 2A\alpha}{4\alpha_2} \int_0^{\infty} g(y) [e^{-\alpha_2|x-y|} - e^{-\alpha_2(x+y)}]\,dy,$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha^2 + 2A\alpha}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{\alpha^2 - 2A\alpha}.$$

§ 2. Рассмотрим теперь интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$f(x) + \int_0^{\infty} f(t) [k_1(x + t) + k_2(x - t)]\,dt = g(x) \quad (0 < x < \infty), \tag{2.1}$$

где функция $k_2(x)$ четная. Уравнение (2.1) будем решать при тех же условиях, что и уравнение (1.1), т. е. когда функции $k_1(x)$, $k_2(x)$ удовлетворяют условиям (1.2), $g(x) \in L^2$, а функцию $f(x)$ ищем в классе L^2.

Принимая здесь $f(x)=g(x)=0$ при $-\infty<x<0$, $k_1(-x)=k_1(x)$ и вводя обозначения (1.3), в которых функции $K(x)$ и $k(t)$ фигурируют с индексами 1 и 2, уравнению (2.1) можно придать вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{F(t)[1+\sqrt{2\pi}K_2(t)]+\sqrt{2\pi}F(-t)K_1(t)-G(t)\}e^{-ixt}dt=0. \quad (2.2)$$

$$(0<x<\infty)$$

Условие $f(x)=0$ при $-\infty<x<0$ перепишем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-ixt}dt=0 \quad (-\infty<x<0). \quad (2.3)$$

Отсюда видно, что существуют функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, голоморфные первая в верхней, вторая в нижней полуплоскостях, исчезающие на бесконечности, соответственно равные на действительной оси

$$\Phi^-(x-i0)=F(x)[1+\sqrt{2\pi}K_2(x)]+\sqrt{2\pi}F(-x)K_1(x)-G(x),$$

$$\Phi^+(x+i0)=F(x) \quad (-\infty<x<\infty). \quad (2.4)$$

Исключая из этих уравнений функцию $F(x)$, получим

$$\Phi^-(x-i0)=\Phi^+(x+i0)[1+\sqrt{2\pi}K_2(x)]+$$

$$+\sqrt{2\pi}\Phi^+(-x+i0)K_1(x)-G(x). \quad (2.5)$$

Заменяя здесь x через $-x$, складывая полученное уравнение с (2.5) и вычитая из него, получим следующие две краевые задачи Гильберта-Привалова

$$\Phi_p^-(x-i0)=V_p(x)\Phi_p^+(x+i0)-G_p(x), \quad (2.6)$$

$$(-\infty<x<\infty), \quad p=1;\ 2,$$

где функции $\Phi_p(x\pm i0)$, $G_p(x)$ определяются по формулам (1.10),

$$V_p(x)=1-(-1)^p\sqrt{2\pi}K_1(x)+\sqrt{2\pi}K_2(x). \quad (2.7)$$

При получении уравнений (2.6) были использованы также соотношения

$$K_p(-x)=K_p(x) \quad (p=1,\ 2). \quad (2.8)$$

Функция $f(x)$ определяется единственным образом ($n_p=0$) по формуле (1.11). При этом функции $\Phi_p^+(x+i0)$ будем определять из соотношений (1.13) и (1.14), в которых функцию $W_p(x)$ нужно заменить через функцию $V_p(x)$ (так как уравнение (2.6) имеет вид (1.9)).

Если в интегральном уравнении (2.1) интегрирование производится в пределах (a, ∞), то, вводя новые переменные $x_1 = x + a$, $t_1 = t + a$ и обозначая $f_1(x) = f(x+a)$, $g_1(x) = g(x+a)$, $\overline{k}_1(x) = k_1(x+2a)$, уравнение можно свести к виду (2.1).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 XII 1965

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՀԱՆԴԻՊՈՂ ԵՐԿՈՒ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում տրվում են (1.1) և (2.1) ինտեգրալ հավասարումների ճշգրիտ լուծումները, երբ այդ հավասարումների աջ մասերը պատկանում են L^2 դասին, իսկ կորիզները բավարարում են (1.2) պայմաններին։ Հավասարումների լուծումները գտնվել են Ի. Մ. Ռապապորտի առաջարկած մեթոդով։

BABLOYAN A. A.

ON TWO INTEGRAL EQUATIONS OF THE FREDHOLM TYPE

Summary

The exact solution of two integral ecuations of Fredholm's type of the second kind is made, the kernel of which depends upon the sum or difference of variables.

These equations are reduced to the Gilbert-Privalov's problems, which are solved by Viner-Hopf's method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рапопорт И. М.* Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. ДАН СССР, 59, № 8, 1948.
2. *Гахов Ф. Ф.* Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. ГИФМА, М., 1958.