ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Том 74, № 1, 2021 Механика

УДК 539.3 http://doi.org/10.33018/74.1.5

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ДЕФОРМАЦИОННОЙ КОНЦЕПЦИЕЙ «СДВИГ ПЛЮС ПОВОРОТ»

Саркисян С. О.

Ключевые слова: модель оболочки, моментная теория, деформационная концепция «сдвиг плюс поворот», энергетические теоремы, вариационные принципы

Energy theorems and variation principles of the shell model based on the momental theory of elasticity with the deformation concept "shear plus rotation"

Sargsyan S. H.

Keywords: shell model, moment theory, deformation concept "shear plus rotation", energy theorems, variation principles

In this paper for the model of a thin shell, which obeys the deformation concept of "shear plus rotation" and which is built using the moment theory of elasticity, energy theorems are proved and variation principles of Lagrange and Castiliano type are established.

«Սահք գումարած պտույտ» դեֆորմացիոն կոնցեպցիայով օժտված մոմենտային առաձգականության տեսությամբ թաղանթների մոդելի էներգետիկ թեորեմները և վարիացիոն սկզբունքներըը

Սարգսյան Ս. Հ.

Հիմնաբառեր. թաղանթի մոդել, մոմենտային տեսություն, «սահք գումարած պտույտ» դեֆորմացիոն կոնցեպ–ցիա, էներգետիկ թեորեմներ, վարիացիոն սկզբունքներ

Աշխատանքում, բարակ թաղանթի այն մոդելի համար, որն օժտված է «սահք գումարած պտույտ» դե–ֆորմացիոն կոնցեպցիայով և որը կառուցված է առաձգականության մոմենտային տեսության հիման վրա, ա–պացուցվում են էներգետիկ թեորեմները և հաստատվում են Լագրանժի ու Կաստիլիանոյի տիպի վարիացիոն սկզբունքները:

В работе для модели тонкой оболочки, которая подчиняется деформационной концепции «сдвиг плюс поворот» и которая построена на основе моментной теории упругости, доказываются энергетические теоремы и устанавливаются вариационные принципы типа Лагранжа и Кастилиано.

Введение

Энергетические теоремы, методы и вариационные принципы статики для линейно деформируемых систем составляют основу механики деформируемого твёрдого тела. Эти теоретические разделы в классической теории упругости и строительной механике [1-4] получили всеобщие признания, нашли широкие применения и в теории оболочек и пластин [4-6]. Энергетические теоремы, методы и вариационные принципы установлены также в моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [7]. Важность вариационных принципов стало ясно благодаря развитию метода конечных элементов и, в итоге, они стали мощным средством при математической формулировке этого метода.

В работах [8,9] на основе метода гипотез, который имеет асимптотическое обоснование, построена прикладная модель оболочек в рамках моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот» (иначе, эту модель можно назвать также моментно-мембранной моделью оболочек).

В данной работе для указанной моментно-мембранной модели оболочек [8,9] устанавливаются энергетические теоремы и вариационные принципы типа Лагранжа и Кастилиано. На основе вариационного принципа Кастилиано для моментно-мембранной модели оболочек выводятся соотношения неразрывности деформации (условия сплошности и гладкости) срединной поверхности оболочки.

1 Постановка задачи

В работе [8], принимая за основу трёхмерные уравнения моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, формируются гипотезы, которые имеют асимптотическую обоснованность, построена модель оболочки с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот» (моментно-мембранная теория оболочек), уравнения которой имеют вид:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_jT_{ii})}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_iS_{ji})}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}S_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}T_{jj}+\frac{N_{i3}}{R_i}=\\
&\qquad\qquad=-(p_i^+-p_i^-),\\
&\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial\alpha_2}=\left(p_3^+-p_3^-\right),\\
&\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_jL_{ii})}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_iL_{ji})}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}L_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}L_{jj}+\\
&\qquad\qquad+\frac{L_{i3}}{R_i}+(-1)^jN_{j3}=-(m_i^+-m_i^-)+(-1)^jh(p_j^++p_j^-),\\
&\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial\alpha_2}-(S_{12}-S_{21})=\\
&\qquad\qquad=(m_3^+-m_3^-),\\
&\qquad\qquad\qquad i\neq j=1,2;
\end{aligned}\tag{1.1}$$

Соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2h}{1-\nu^2}(\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}),\quad S_{ij}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}\right],$$
$$N_{i3}=2G^*h\Gamma_{i3},\quad L_{ii}=2h\frac{2\gamma}{\beta+2\gamma}[2(\beta+\gamma)k_{ii}+\beta k_{jj}], \tag{1.2}$$
$$L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{ij}+(\gamma-\varepsilon)k_{ji}\right],\quad L_{i3}=2Bhk_{i3},$$
$$i\neq j=1,2;$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},$$
$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i+(-1)^i\Omega_3,$$
$$\Gamma_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}-\frac{u_i}{R_i}+(-1)^j\Omega_j, \tag{1.3}$$
$$k_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i},\ k_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,$$
$$k_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},$$
$$i\neq j=1,2.$$

Здесь T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}- усилия; L_{ii}, L_{ij}, $L_{i3}-$ моменты от моментных напряжений; Γ_{ii}, Γ_{ij}, $\Gamma_{i3}-$ деформации; k_{ii}, k_{ij}, $k_{i3}-$изгибы-кручения срединной поверхности оболочки; u_i, $w-$перемещения, Ω_i, Ω_3-свободные повороты точек срединной поверхности оболочки; $p_i^{\pm}$, $p_3^{\pm}$, $m_i^{\pm}$, $m_3^{\pm}-$усилия и моменты, приложенные на лицевых поверхностях ($z=\pm h$) оболочки; A_i, R_i-коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки; α_1, α_2-представляют собой линии главных кривизн срединной поверхности оболочки. Все величины в уравнениях (1.1)-(1.3) являются функциями от (α_1, α_2).

Следует сказать, что когда известны усилия и моменты (T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}), напряжения (σ_{ii}, σ_{ij}, σ_{i3}) и моментные напряжения (μ_{ii}, μ_{ij}, μ_{i3}) будут определяться по формулам [8]:

$$\sigma_{ii}=\frac{T_{ii}}{2h},\quad \sigma_{ij}=\frac{S_{ij}}{2h},\quad \sigma_{i3}=\frac{N_{i3}}{2h},$$
$$\mu_{ii}=\frac{L_{ii}}{2h},\quad \mu_{ij}=\frac{L_{ij}}{2h},\quad \mu_{i3}=\frac{L_{i3}}{2h},$$

т.е. они распределены по толщине оболочки равномерным образом (имея в виду эти свойства распределения напряжений и моментных напряжений), прикладная модель моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот» была названа также иначе: «прикладная модель моментно-мембранных оболочек».

К системе уравнений (1.1)-(1.3) прикладной модели моментно-мембранных оболочек следует присоединить граничные условия.

На части границы Γ' области срединной поверхности оболочки (S), где заданы усилия и моменты, граничные условия имеют вид (например, для края, совпадающего с координатной линией α_2):

$$\begin{aligned} &T_{11} = T_{11}^*, \quad S_{12} = S_{12}^*, \quad N_{13} = N_{13}^*, \\ &L_{11} = L_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^*, \quad L_{13} = L_{13}^*. \end{aligned} \tag{1.4}$$

На части границы Γ'' области срединной поверхности оболочки (S), где заданы перемещения и свободные повороты, граничные условия будут выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned} &u_1 = u_1^*, \quad u_2 = u_2^* \quad w = w^*, \\ &\Omega_1 = \Omega_1^*, \quad \Omega_2 = \Omega_2^*, \quad \Omega_3 = \Omega_3^*. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Могут иметь место также граничные условия смешанного вида. Таким образом, уравнения (1.1)-(1.3) и граничные условия (1.4), (1.5) представляют собой моментно-мембранной прикладной моделью оболочек. Отметим, что в работе [9] выведены соотношения неразрывности деформаций (соотношения сплошности и гладкости) срединной поверхности моментно-мембранной прикладной модели оболочек.

Теперь, наша цель для моментно-мембранной прикладной модели оболочек (1.1)-(1.5) установить энергетические теоремы и вариационные принципы.

2 Энергетические теоремы

Рассмотрим напряжённое состояние (T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, $i \neq j = 1, 2$) и соответствующее ему деформированное состояние (Γ_{ii}, Γ_{ij}, Γ_{i3}, k_{ii}, k_{ij}, k_{i3}, $i \neq j = 1, 2$) моментно-мембраной прокладной модели оболочек, которые удовлетворяют основным уравнениям (1.1)-(1.3). Система уравнений равновесия (1.1) состоит из 6-ти уравнений, эти уравнения, умножая, соответственно, на u_1, u_2, w, Ω_1, Ω_2, Ω_3, суммируем полученные выражения и результат интегрируем по области (S) срединной поверхности оболочки, после некоторых преобразований приходим к уравнению закона сохранения энергии (т.е. к теореме типа Клапейрона):

$$\iint\limits_{(S)} W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \frac{1}{2} A_0, \tag{2.1}$$

где W_0– поверхностная плотность потенциальной энергии деформации оболочки, а $\frac{1}{2}A_0$– работа приложенных к оболочке внешних усилий и моментов:

$$\begin{aligned} W_0 = \frac{1}{2}(&T_{11}\Gamma_{11} + T_{22}\Gamma_{22} + S_{12}\Gamma_{12} + S_{21}\Gamma_{21} + N_{13}\Gamma_{13} + N_{23}\Gamma_{23} + \\ &+ L_{11}k_{11} + L_{22}k_{22} + L_{12}k_{12} + L_{21}k_{21} + L_{13}k_{13} + L_{23}k_{23}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$
\begin{aligned}
A_0 = \iint\limits_{(S)} & \left[\left(p_1^+ - p_1^-\right) u_1 + \left(p_2^+ - p_2^-\right) u_2 + \left(p_3^+ - p_3^-\right) w + \right. \\
& + \left(\left(m_1^+ - m_1^-\right) - h\left(p_2^+ + p_2^-\right)\right) \Omega_1 + \left(\left(m_2^+ - m_2^-\right) + h\left(p_1^+ + p_1^-\right)\right) \Omega_2 + \\
& \left. + \left(m_3^+ - m_3^-\right) \Omega_3\right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \int\limits_{\Gamma} \left[\left(T_{11} u_1 + S_{12} u_2 + N_{13} w + L_{11}\Omega_1 + \right.\right. \\
& + L_{12}\Omega_2 + L_{13}\Omega_3\right) A_2 d\alpha_2 - \left(S_{21} u_1 + T_{22} u_2 + N_{23} w + L_{21}\Omega_1 + \right. \\
& \left.\left. + L_{12}\Omega_2 + L_{23}\Omega_3\right) A_1 d\alpha_1\right],
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где (Γ)– контур области срединой поверхности оболочки (S).

Учитывая соотношения упругости (1.2), плотность потенциальной энергии деформации оболочки W_0 можем представить в виде:

$$
\begin{aligned}
W_0 = \frac{1}{2} 2h & \left[\frac{E}{1-\nu^2}(\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\nu\Gamma_{11}\Gamma_{22}) + (\mu + \alpha)\,(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) + \right. \\
& + 2(\mu - \alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21} + G^*(\Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2) + \frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta + 2\gamma}(k_{11}^2 + k_{22}^2) + \\
& \left. + \frac{4\gamma\beta}{\beta + 2\gamma} k_{11} k_{22} + (\gamma + \varepsilon)(k_{12}^2 + k_{21}^2) + 2(\gamma - \varepsilon) k_{12} k_{21} + B(k_{13}^2 + k_{23}^2)\right],
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

которая из себя представляет положительно определённую квадратичную форму.

На основании закона сохранения энергии (2.1), для модели моментно-мембранных оболочек известным способом можем доказать, что краевая задача (1.1)-(1.5) имеет только единственное решение (т.е. для рассматриваемой модели оболочек имеет место теорема типа Кирхгофа).

Рассмотрим для моментно-мембранной модели (областью S и контуром Γ) два состояния равновесия, называемые соответственно I и II, характеризуемые величинами $u_1^I, u_2^I, w^I, \Omega_1^I, \Omega_2^I, \Omega_3^I, T_{11}^I, \ldots, L_{23}^I, \Gamma_{11}^I, \ldots, k_{23}^I$, вызванными усилиями и моментами $(p_1^{I+} + p_1^{I-}), \ldots, (m_3^{I+} + m_3^{I-})$, а также, u_1^{II}, u_2^{II}, w^{II}, Ω_1^{II}, Ω_2^{II}, Ω_3^{II}, $T_{11}^{II}, \ldots, L_{23}^{II}, \Gamma_{11}^{II}, \ldots, k_{23}^{II}$, вызванными усилиями и моментами $(p_1^{II+} + p_1^{II-}), \ldots,$ $(m_3^{II+} + m_3^{II-})$.

Прежде всего справедливо тождество

$$
T_{11}^I\Gamma_{11}^{II} + T_{22}^I\Gamma_{22}^{II} + \ldots + L_{23}^I k_{23}^{II} = T_{11}^{II}\Gamma_{11}^I + T_{22}^{II}\Gamma_{22}^I + \ldots + L_{23}^{II} k_{23}^I \tag{2.5}
$$

которое легко можно проверить с помощью применения соотношений упругости (1.2). Формула (2.5) является одной из форм теоремы типа Бетти для рассматриваемой модели оболочек.

Интегрируя равенство (2.5) по области срединной поверхности оболочки (S), после некоторых преобразований, приходим к теореме о взаимности работ (к теореме типа Бетти) для моментно-мембранной модели оболочек:

$$
A_{12} = A_{21}. \tag{2.6}
$$

Если физические соотношения упругости (1.2) будем решать относительно деформаций и изгиб-кручений

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{ii}=\frac{1}{2Eh}\left(T_{ii}-\nu T_{ji}\right), \quad \Gamma_{ij}=\frac{1}{2h}\left[\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}S_{ij}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}S_{ji}\right],\\
&\Gamma_{i3}=\frac{1}{2G^{*}h}N_{i3}, \quad k_{ii}=\frac{1}{2h}\cdot\frac{1}{2\gamma\left(3\beta+2\gamma\right)}\left[2\left(\beta+\gamma\right)L_{ii}-\beta L_{jj}\right],\\
&k_{ij}=\frac{1}{2h}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}L_{ij}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}L_{ji}\right], \quad k_{i3}=\frac{1}{2Bh}L_{i3}, \quad i\neq j=1,2,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

плотность потенциальной энергии деформации (2.2) можем выражать через усилия и моменты:

$$
\begin{aligned}
\overset{*}{W}_0=W_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2h}\Bigg\{&\frac{1}{E}\left(T_{11}^2+T_{22}^2\right)-\frac{2\nu}{E}\,T_{11}T_{22}+\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\left(S_{12}^2+S_{21}^2\right)-\\
&-2\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}S_{12}S_{21}+\frac{1}{G^{*}}\left(N_{13}^2+N_{23}^2\right)+\frac{2\left(\beta+\gamma\right)}{2\gamma\left(3\beta+2\gamma\right)}\left(L_{11}^2+L_{22}^2\right)-\\
&-\frac{2\beta}{2\gamma\left(3\beta+2\gamma\right)}L_{11}L_{22}+\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\left(L_{11}^2+L_{22}^2\right)-\\
&-\frac{2\left(\gamma-\varepsilon\right)}{4\gamma\varepsilon}L_{11}L_{22}+\frac{1}{B}\left(L_{13}^2+L_{23}^2\right)\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Используя выражение плотности потенциальной энергии деформации (2.4), легко получить формулы типа Грина:

$$
T_{11}=\frac{\partial W_0}{\partial\Gamma_{11}}, \quad T_{22}=\frac{\partial W_0}{\partial\Gamma_{22}}, \quad \ldots, \quad L_{23}=\frac{\partial W_0}{\partial k_{23}},
\tag{2.9}
$$

и, наоборот, используя формулу (2.8), легко получить формулы типа Кастилиано:

$$
\Gamma_{11}=\frac{\partial\overset{*}{W}_0}{\partial T_{11}}, \quad \Gamma_{22}=\frac{\partial\overset{*}{W}_0}{\partial T_{22}}, \quad \ldots, \quad k_{23}=\frac{\partial\overset{*}{W}_0}{\partial L_{23}}.
\tag{2.10}
$$

3 Вариационный принцип возможных перемещений типа Лагранжа

Возможные перемещения δu_i, δw и повороты $\delta\Omega_i$, $\delta\Omega_3$ являются произвольными непрерывными функциями точки срединной поверхности оболочки, следствием которых являются возможные деформации $\delta\Gamma_{ii}$, …, $\delta\Gamma_{i3}$ и изгибы-кручения δk_{ii}, …, δk_{i3} (тем самым, они удовлетворяют геометрическим соотношениям (1.3) и условиям неразрывности срединной поверхности [9], кроме того, они находятся в согласии с кинематическими связями, наложенными на оболочку.

Для деформированной оболочки (область срединной поверхности (S) с граничным контуром $\Gamma=\Gamma'+\Gamma''$), находящейся в равновесии, справедливы уравнения равновесия (1.1) и граничные условия на Γ. Уравнения равновесия соответственно умножим на δu_1, δu_2, δw, $\delta\Omega_1$, $\delta\Omega_2$, $\delta\Omega_3$, полученные уравнения сложим, результат проинтегрируем по (S), после некоторых преобразований приходим к уравнению:

$$
\begin{aligned}
&\delta \iint_{(S)} W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \iint_{(S)} \big[(p_1^+ - p_1^-)\delta u_1 + \ldots + \\
&+ \big(m_3^+ - m_3^-\big)\delta\Omega_3\big] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
&+ \int\limits_{\Gamma'} [(T_{11}\delta u_1 + \ldots + L_{13}\delta\Omega_3) A_2 d\alpha_2 - (S_{21}\delta u_1 + \ldots + L_{23}\delta\Omega_3) A_1 d\alpha_1]
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

на Γ'', где заданы перемещения и независимые повороты, возможные перемещения и повороты равны нулю. Здесь,

$$
\begin{aligned}
\delta \iint\limits_{(S)} W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \iint\limits_{(S)} & (T_{11}\delta\Gamma_{11} + T_{22}\delta\Gamma_{22} + S_{12}\delta\Gamma_{12} + S_{21}\delta\Gamma_{21} + \\
& + N_{13}\delta\Gamma_{13} + N_{23}\delta\Gamma_{23} + L_{11}\delta k_{11} + L_{22}\delta k_{22} + L_{12}\delta k_{12} + \\
& + L_{21}\delta k_{21} + L_{13}\delta k_{13} + L_{23}\delta k_{23})\, A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Уравнение (3.1) выражает принцип возможных перемещений Лагранжа для моментно-мембранной модели оболочек. По этому принципу, для деформируемой оболочки, находящейся в состоянии равновесия, полная возможная работа внешних сил и моментов, равна возможной работе внутренних усилий и моментов на любых кинематически допустимых перемещениях и свободных поворотах. Отметим, что из вариационного уравнения будут следовать уравнения движения оболочки (1.1) и граничные условия (1.4) на контуре Γ', где заданы внешние усилия и моменты. Так как усилия и моменты, которые действуют в точках области (S) и на контуре Γ'-этой области, нам заданы и, следовательно, не варьируются, тогда уравнение (3.1) можно переписать в форме

$$
\delta\Pi_0 = 0, \tag{3.3}
$$

где Π_0 есть потенциальная энергия всей системы:

$$
\begin{aligned}
\Pi_0 = & \iint\limits_{(S)} W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \iint\limits_{(S)} \big[\big(p_1^+ - p_1^-\big)\, u_1 + \ldots + \big(m_3^+ - m_3^-\big)\, \Omega_3 \big] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \int\limits_{\Gamma'} [(T_{11} u_1 + \ldots + L_{13}\Omega_3) A_2 d\alpha_2 - (S_{21} u_1 + \ldots + L_{23}\Omega_3) A_1 d\alpha_1]\, .
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Вариационное уравнение (3.3) будет выражать принцип стационарности полной потенциальной энергии, который гласит: из всех допустимых перемещений и свободных поворотов, удовлетворяющих заданными граничными условиями на Γ'', истинные перемещения и свободные повороты, которые соответствуют состоянию равновесия оболочки, доставляют полной потенциальной энергии стационарное значение или короче: если деформируемая оболочка находится в равновесии, то полная потенциальная энергия имеет стационарное значение. Взяв вторую вариацию Π_0, можем показать, что в рассматриваемом нами случае потенциальная энергия имеет минимальное значение ($\Pi_0' > \Pi_0$). Т.е. в случае устойчивого равновесия оболочки стационарное значение полной потенциальной энергии соответствует минимуму. Это составляет принцип минимума полной потенциальной энергии для моментно-мембранной модели оболочек.

Указанный минимальный принцип имеет большое значение прежде всего потому, что он лежит в основе важных приближённых и численных методов решения соответствующих граничных задач, в частности, при развитии метода конечных элементов.

4 Вариационный принцип типа Кастилиано

Геометрические соотношения (1.3) моментно-мембранной модели оболочек перепишем так:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{ii} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j + \frac{w}{R_i}\right) = 0,\\
&\Gamma_{ij} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_i + (-1)^i\Omega_3\right) = 0,\\
&\Gamma_{i3} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i} + (-1)^j\Omega_j\right) = 0,\\
&k_{ii} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i}\right) = 0,\\
&k_{ij} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i\right) = 0,\\
&k_{i3} - \left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}\right) = 0,\ i \neq j = 1,2.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Предположим, что усилия и моменты в оболочке испытывают малые вариации от положения равновесия (δT_{ii}, δS_{ij}, δN_{i3}, δL_{ii}, δL_{ij}, δL_{i3}). Тогда можем написать равенство:

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{(S)} \left\{\left[\Gamma_{11} - \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_2 + \frac{w}{R_1}\right)\right]\delta T_{11} + \ldots + \right.\\
&\left. + \left[k_{23} - \left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\Omega_2}{R_2}\right)\right]\delta L_{23}\right\} A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 +\\
&+ \int\limits_{\Gamma''} \left[\left(u_1 - \overset{0}{u}_1\right)\delta T_{11} + \left(u_2 - \overset{0}{u}_2\right)\delta S_{12} + \left(w - \overset{0}{w}\right)\delta N_{13} + \right.\\
&\left. + \left(\Omega_1 - \overset{0}{\Omega}_1\right)\delta L_{11} + \left(\Omega_2 - \overset{0}{\Omega}_2\right)\delta L_{12} + \left(\Omega_3 - \overset{0}{\Omega}_3\right)\delta L_{13}\right] A_2 d\alpha_2 -
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

$$-\int\limits_{\Gamma''}\left[\left(u_1-\overset{0}{u}_1\right)\delta S_{21}+\left(u_2-\overset{0}{u}_2\right)\delta T_{22}+\left(w-\overset{0}{w}\right)\delta N_{23}+\right.$$
$$\left.+\left(\Omega_1-\overset{0}{\Omega}_1\right)\delta L_{21}+\left(\Omega_2-\overset{0}{\Omega}_2\right)\delta L_{22}+\left(\Omega_3-\overset{0}{\Omega}_3\right)\delta L_{23}\right]A_1d\alpha_1=0,$$

которое после интегрирования по частям переходит в соотношение

$$\begin{gathered}\iint\limits_{(S)}\left\{(\Gamma_{11}\delta T_{11}+\Gamma_{22}\delta T_{22}+...+k_{23}\,\delta L_{23})+\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\,(A_2\delta T_{11})}{\partial\alpha_1}++\right.\right.\\ \left.+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1\delta S_{ji})}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\delta S_{12}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\delta T_{22}+\frac{\delta N_{13}}{R_1}\right]u_1+\\ +\ldots+\left[-\frac{\delta L_{11}}{R_1}-\frac{\delta L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\,(A_2\delta L_{13})}{\partial\alpha_1}+\right.\\ \left.\left.+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1\delta L_{23})}{\partial\alpha_2}-(\delta S_{12}-\delta S_{21})\right]\Omega_3\right\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2-\\ -\int\limits_{\Gamma'}[\,(u_1\delta T_{11}+u_2\delta S_{12}+w\delta N_{13}+\Omega_1\delta L_{11}+\Omega_2\delta L_{12}+\Omega_3\delta L_{13})\,A_2d\alpha_2-\\ -(u_1\delta S_{21}+u_2\delta T_{22}+w\delta N_{23}+\Omega_1\delta L_{21}+\Omega_2\delta L_{22}+\Omega_3\delta L_{23})A_1d\alpha_1\,]-\\ -\int\limits_{\Gamma''}[(\overset{0}{u}_1\delta T_{11}+\overset{0}{u}_2\delta S_{12}+\overset{0}{w}\delta N_{13}+\overset{0}{\Omega}_1\delta L_{11}+\overset{0}{\Omega}_2\delta L_{12}+\overset{0}{\Omega}_3\delta L_{13})A_2d\alpha_2-\\ -(\overset{0}{u}_1\delta S_{21}+\overset{0}{u}_2\delta T_{22}+\overset{0}{w}\,\delta N_{23}+\overset{0}{\Omega}_1\delta L_{21}+\overset{0}{\Omega}_2\delta L_{22}+\overset{0}{\Omega}_3\delta L_{23})A_1\,d\alpha_1]=0.\end{gathered}\tag{4.3}$$

Выберём теперь виртуальные усилия и моменты так, чтобы уравнения равновесия и граничные условия в усилиях и моментах не нарушались, а именно: чтобы виртуальные усилия и моменты удовлетворяли однородным уравнениям равновесия (1.1) в (S) и однородным граничным условиям (1.4) на Γ'. Тогда (4.3) сводится к равенству

$$\begin{gathered}\delta\iint\limits_{(S)}\overset{*}{W}_0A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2=\\ =\int\limits_{\Gamma''}[(\overset{0}{u}_1\delta T_{11}+\overset{0}{u}_2\delta S_{12}+\overset{0}{w}\delta N_{13}+\overset{0}{\Omega}_1\delta L_{11}+\overset{0}{\Omega}_2\delta L_{12}+\overset{0}{\Omega}_3\delta L_{13})A_2d\alpha_2-\\ -(\overset{0}{u}_1\delta S_{21}+\overset{0}{u}_2\delta T_{22}+\overset{0}{w}\,\delta N_{23}+\overset{0}{\Omega}_1\delta L_{21}+\overset{0}{\Omega}_2\delta L_{22}+\overset{0}{\Omega}_3\delta L_{23}\,)A_1d\alpha_1]\,,\end{gathered}\tag{4.4}$$

где

$$\begin{gathered}\delta\iint\limits_{(S)}\overset{*}{W}_0A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2=\iint\limits_{(S)}(\Gamma_{11}\delta T_{11}+\Gamma_{22}\delta_{22}+\Gamma_{12}\delta S_{12}+\Gamma_{21}\delta S_{21}+\\ +\Gamma_{13}\delta N_{13}+\Gamma_{23}\delta N_{23}+k_{11}\delta L_{11}+k_{22}\delta L_{22}+k_{12}\delta L_{12}+k_{21}\delta L_{21}+\\ +k_{13}\delta L_{13}+k_{23}\delta L_{23})\,A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2.\end{gathered}\tag{4.5}$$

Уравнение (4.4) перепишем в следующем виде:

$$\delta\overset{*}{\Pi}_0 = 0, \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned}\overset{*}{\Pi}_0 = &\iint\limits_{(S)} \overset{*}{W}_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ &- \int\limits_{\Gamma''} \Bigg[\left(\overset{0}{u}_1 T_{11} + \overset{0}{u}_2 S_{12} + \overset{0}{w} N_{13} + \overset{0}{\Omega}_1 L_{11} + \overset{0}{\Omega}_2 L_{12} + \overset{0}{\Omega}_3 L_{13} \right) A_2 d\alpha_2 - \\ &- \left(\overset{0}{u}_1 S_{21} + \overset{0}{u}_2 T_{22} + \overset{0}{w} N_{23} + \overset{0}{\Omega}_1 L_{21} + \overset{0}{\Omega}_2 L_{22} + \overset{0}{\Omega}_3 L_{23} \right) A_1 d\alpha_1 \Bigg].\end{aligned} \tag{4.7}$$

Выражение (4.7) представляет собой полную дополнительную потенциальную энергию системы.

Теперь, вариационное уравнение (4.6) можем представить как принцип стационарности полной дополнительной потенциальной энергии: из всех усилий и моментов, которые удовлетворяют уравнениям равновесия, т.е. которые соответствуют истинному деформированному состоянию оболочки, сообщают полной дополнительной потенциальной энергии стационарное значение.

На основании этого принципа можно известным образом заключить, что в случае устойчивого равновесия, стационарное значение $\overset{*}{\Pi}_0$ соответствует минимуму. Это и есть принцип типа Кастилиано для моментно-мембранной модели оболочек.

Литература

[1] Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.-Л.: ГИТТЛ. 1947. 464с.

[2] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872с.

[3] Розин Л.А. Теоремы и методы статики деформируемых систем Л.: Изд-во Ленинградского ун-та. 1986. 276 с.

[4] Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

[5] Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью. Киев: Ноукова думка. 1973. 248 с.

[6] Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне. 1988. 284 с.

[7] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon. 1986. 383p.

[8] Саркисян С.О. Тонкие оболочки по моментной теории упругости как деформационные модели наноматериалов. Доклады НАН Армении. 2020. Т.120. № 4. С. 239-248.

[9] Саркисян С.О. Соотношения неразрывности деформаций срединной поверхности моментных оболочек с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот». Изв. НАН Армении. Механика. 2020. Т.73. № 4. С.48-57.

Сведения об авторе

Саркисян Самвел Оганесович- член-корреспондент НАН РА, доктор физмат. наук, профессор. Ширакский государственный университет.
Тел. (+374 93) 15 16 98 **email**: s_sargsyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 03.02.2021